

الرياضيات
للصف الأول الثانوي
الفصل الدراسى الأول



الفصل الرابع

العلاقات فى المثلث



المنصّفات في المثلث
Bisectors of Triangle

فيما سبق:

درستُ منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن:

- أتعرّف الأعمدة المنصّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرّف منصّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

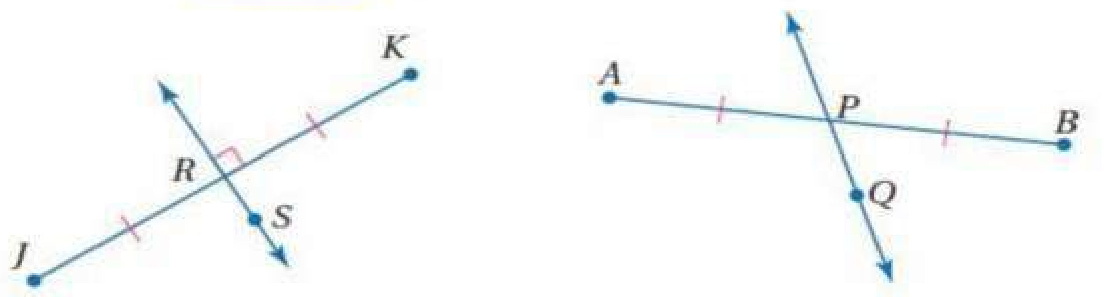
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كل من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها. وإذا كان المنصّف عموديًا على القطعة سُمّي **عمودًا منصّفًا**.



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لـ $\overline{AB}$ 　　 $\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لـ $\overline{JK}$

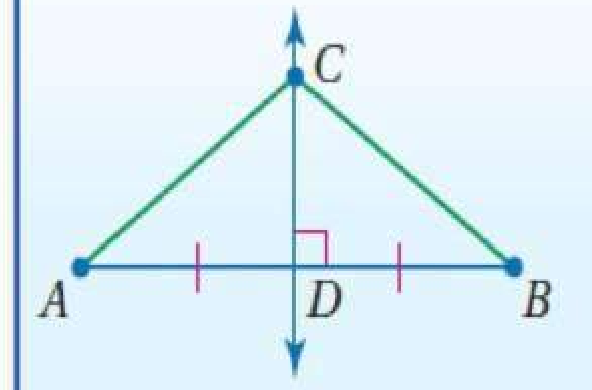
تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط في المستوى تقع كل منها على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة. وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:



نظريتان

الأعمدة المنصَفة

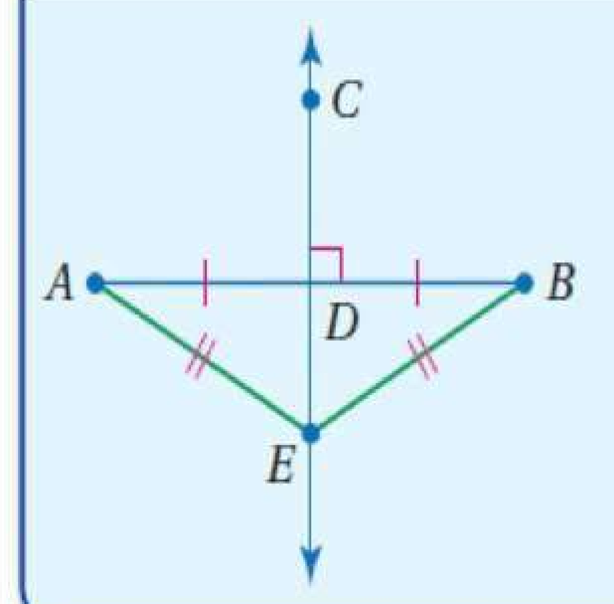
4.1 نظريّة العمود المنصَف



كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.

مثال: إذا كانت $\overline{CD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AB}$ ، فإن $AC = BC$.

4.2 عكس نظريَة العمود المنصَف



كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$ ، فإنّ E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$ ، وهو العمود المنصَف لـ $\overline{AB}$.

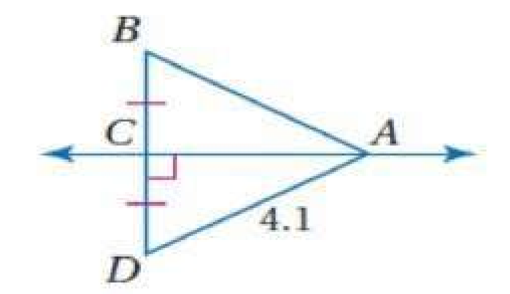
مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصِّف



أوجد كلّ قياس مما يأتي :



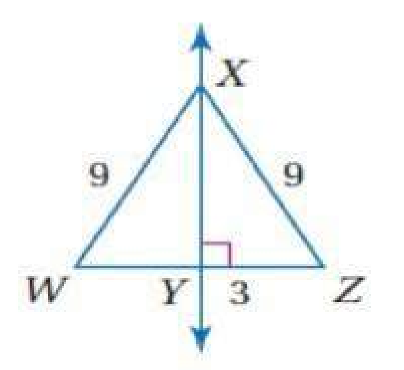
AB (a



من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لـ $\overline{BD}$.

$AB = AD$	نظريّة العمود المنصّف
$AB = 4.1$	بالتعويض

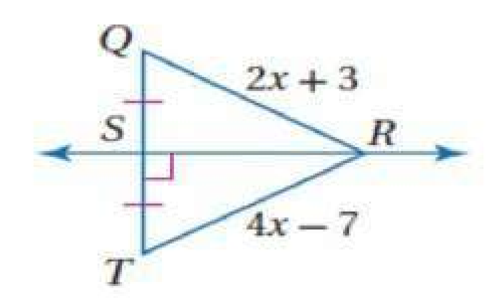
WY (b



بما أنّ $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$ ، $WX = ZX$ فإن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لـ $\overline{WZ}$ بحسب عكس نظرية العمود المنصّف. ومن تعريف منصّف القطعة المستقيمة ينتج أن $WY = YZ$. وبما أن $YZ = 3$، فإن $WY = 3$.



RT (c



$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

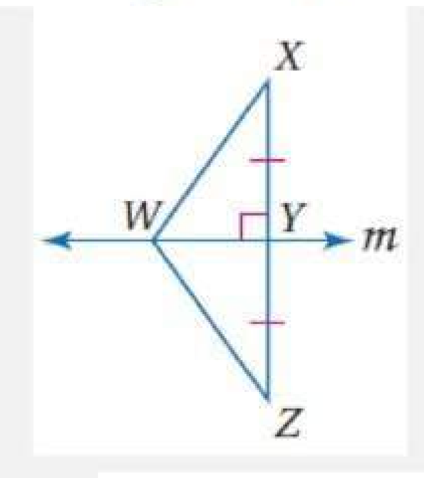
$RT = RQ$	نظريّة العمود المنصّف
$4x - 7 = 2x + 3$	بالتعويض
$2x - 7 = 3$	بطرح $2x$ من الطرفين
$2x = 10$	بإضافة 7 إلى الطرفين
$x = 5$	بقسمة الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.



تحقق من فهمك

1A) إذا كان $WX = 25.3$, $YZ = 22.4$, $WZ = 25.3$ ، فأوجد طول XY.



22.4

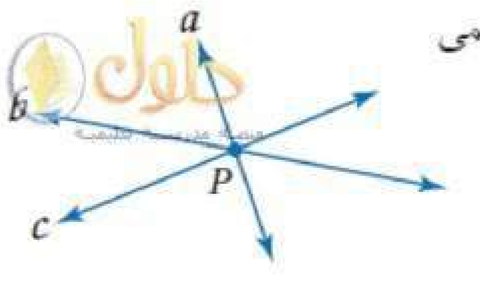
1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$، فأوجد طول WX.

14.9

1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15$, $WZ = a + 12$
فأوجد طول $\overline{WX}$.

21

عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة فإنّ هذه المستقيمات تُسمى **مستقيمات متلاقية**. وتسمّى النقطة التي تلتقي فيها المستقيمات **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **بمركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث**.



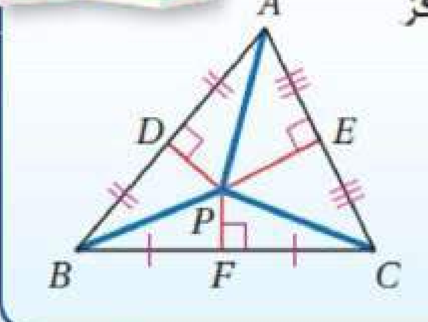

تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمّى مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، فإنّ $PB = PA = PC$.

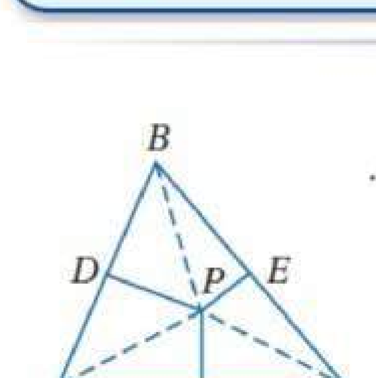


برهان نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

برهان حرّ:



بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لِـ $\overline{AC}$ فإنها متساوية البُعد عن A, C . وبحسب تعريف تساوي البعد يكون $AP = CP$. والعمود المنصّف لِـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

إرشادات للدراسة

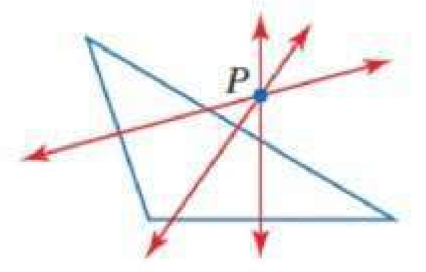
العمود المنصَف

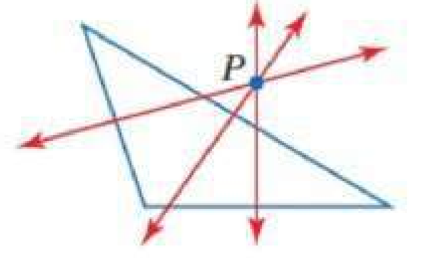
ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل. فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمُر بالرأس Z.

Z
X Y

يمكن أن يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



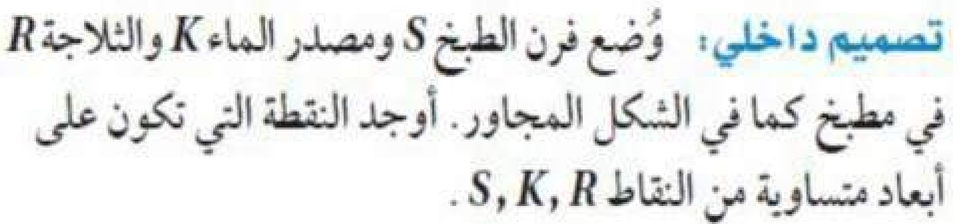






مثلث قائم الزاوية — مثلث منفرج الزاوية — مثلث حاد الزوايا

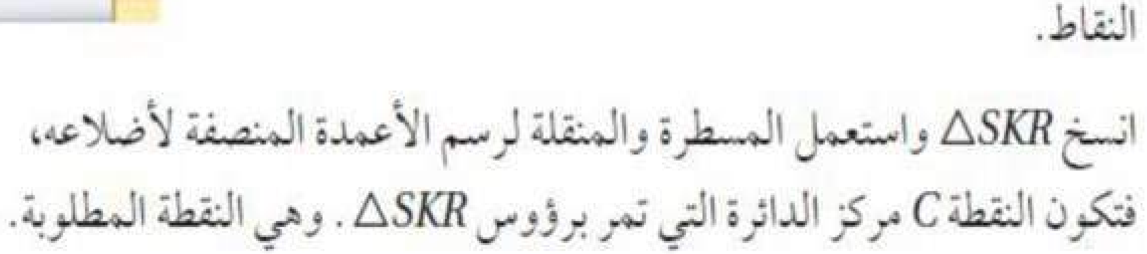
مثال 2 من واقع الحياة
استعمال نظريّة مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث



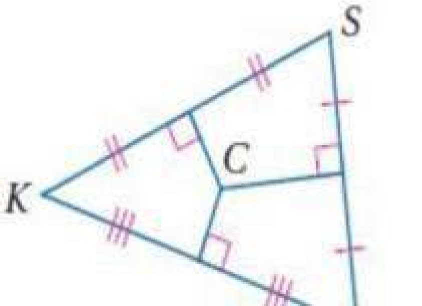


تصميم داخلي: وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R.

بحسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle SKR$. وهي النقطة المطلوبة.



الربط مع الحياة

يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب أن لا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

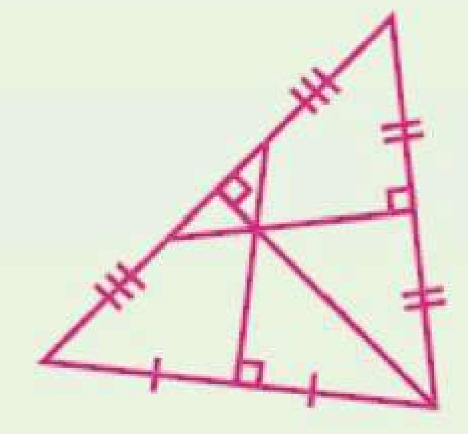


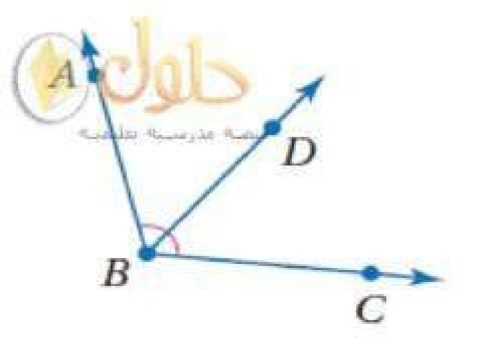
تحقق من فهمك

2) يريد عليّ أن يضع مرشّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل. فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟



2) يتعيَّن على عليٍّ وضعُ المرشِّ عند مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي يمثل شكل الحديقة.





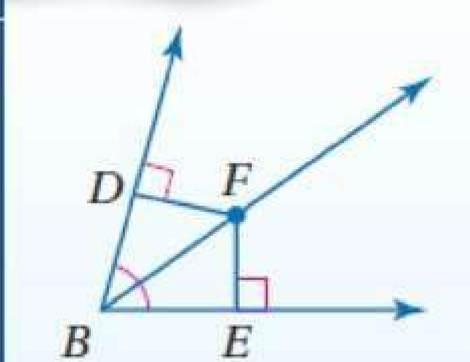
$\overrightarrow{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$.

منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصّف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. ويمكن أن يكون منصّف الزاوية مستقيمًا أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم. كما يمكن أن يوصف منصّف الزاوية بأنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين.

نظريتان منصّفات الزوايا

أضف إلى مطويتك

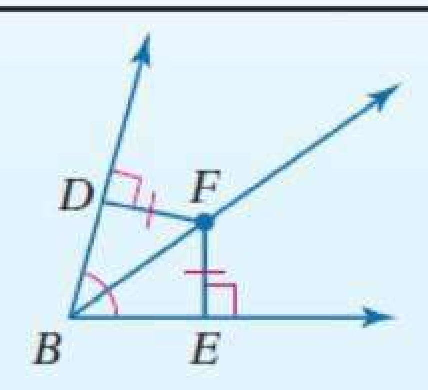
4.4 نظرية منصّف الزاوية



كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لِـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ فإن $DF = FE$.

4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية



كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

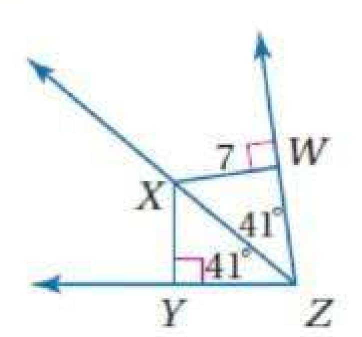
مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ ،
فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$.





استعمال نظريتي منصِّفات الزاوايا

أوجد كل قياس مما يأتي :

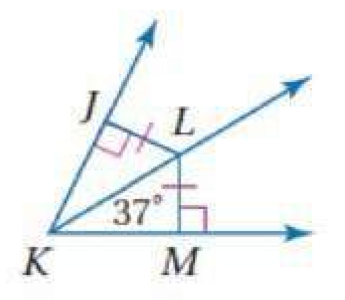


a) XY

$XY = XW$ نظريّة منصِّف الزاوية

$XY = 7$ بالتعويض

b) $m\angle JKL$



بما أن $\overline{LJ} = \overline{LM}$, $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$, $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصِّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصِّف $\angle JKM$.

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف منصِّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37°$ بالتعويض



c) SP

$SP = SM$ نظريّة منصِّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ بالتعويض

$3x - 7 = 5$ نطرح $3x$ من الطرفين

$3x = 12$ بإضافة 7 إلى الطرفين

$x = 4$ بقسمة الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.



تحقق من فهمك

3A) إذا كان: $DC = 5, BC = 5, m\angle BAC = 38°$ ، فأوجد $m\angle DAC$

38°

3B) إذا كان: $DC = 10, m\angle DAC = 40°, m\angle BAC = 40°$ ، فأوجد BC

10

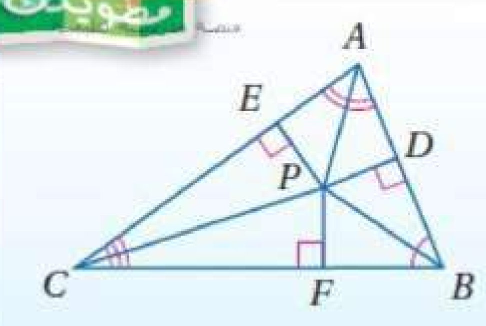
3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $DC = 9x - 7, BC = 4x + 8$ فأوجد BC

20



نظريّة 4.6

نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث



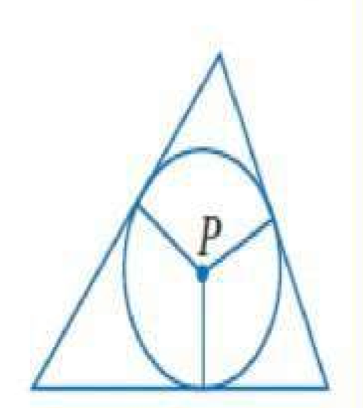
التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC، فإنّ $PD = PE = PF$.

قراءة الرياضيات

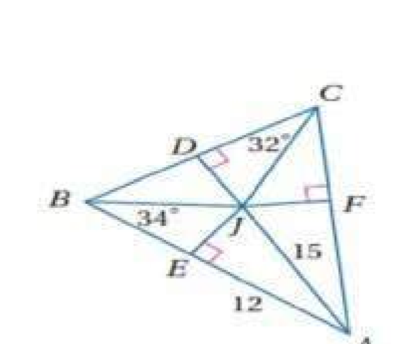
مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع دائمًا داخل المثلث.



مثال 4 استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.



a) JF

بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$ بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظريّة فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144, 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	بطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ لذا نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.
وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$.

b) $\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$؛ إذن $m\angle CBE = 2(34°) = 68°$.
وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$؛ إذن $m\angle DCF = 2(32°) = 64°$.

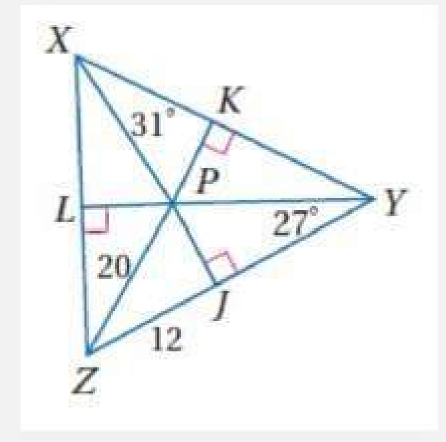
$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$68° + 64° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 68°; m\angle DCF = 64°$
$132° + m\angle FAE = 180°$	بالتبسيط.
$m\angle FAE = 48°$	بطرح 132 من الطرفين.

وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(48°) = 24°$.

X



تحقق من فهمك



إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

4A) PK

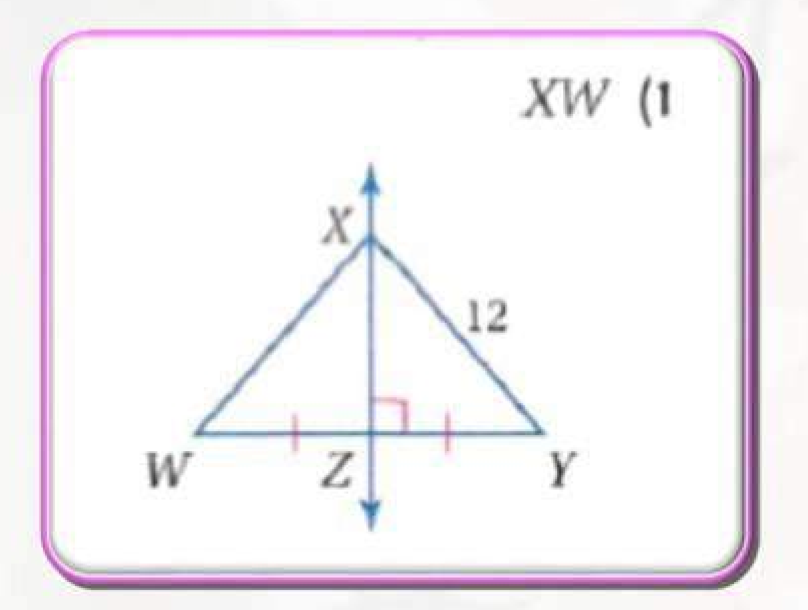
18

4B) $\angle LZP$

37°





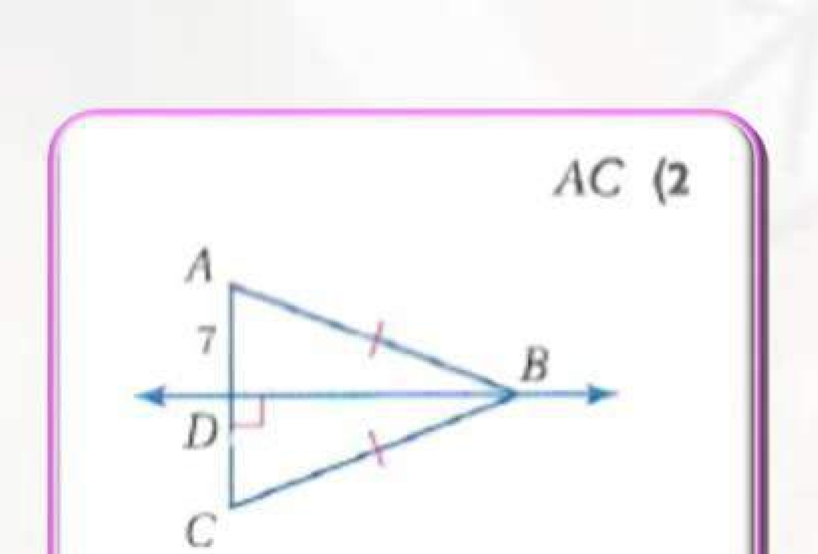




بما أن ZX عمود منصف لـ WY

إذن $XY = WX = 12$ (حسب نظرية العمود المنصف)







بما أن $AB = BC$ و $BD \perp AC$ إذن BD عمود منصف لـ AC

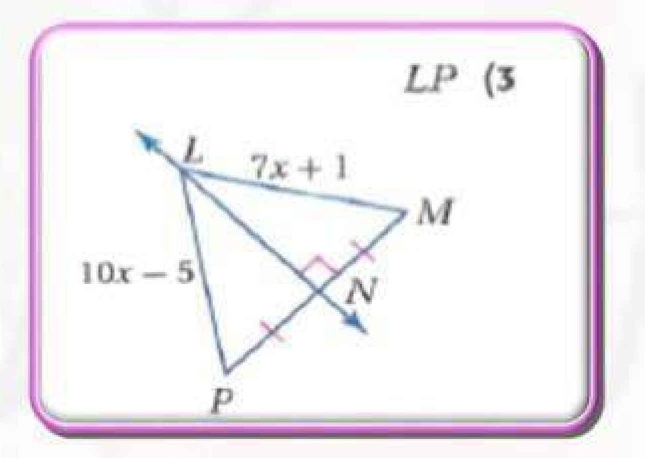
إذن $7 = AD = DC$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف)

$14 = 7 + 7 = AD + DC = AC$





أوجد قياس كل مما يأتي :





بما أن LN عمود منصف لـ PM إذن LP = LM (نظرية العمود المنصف)

$10X - 5 = 7X + 1$

$10X - 7X = 1 + 5$

$3X = 6$

$X = 2$

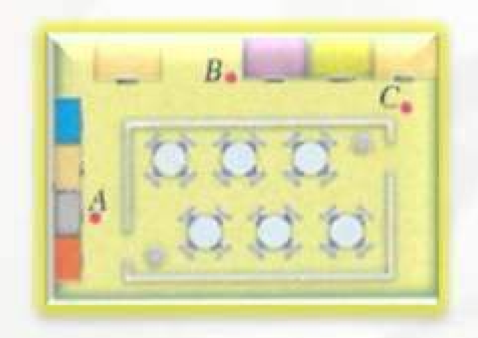
$LP = 10 \times 2 - 5$

$LP = 15$

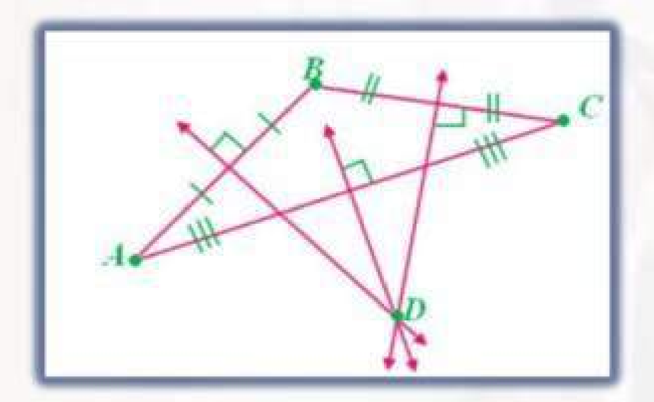




4) **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أمّا الرابع فكان يزوّدهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعادٍ متساوية من أصدقائه الثلاثة.



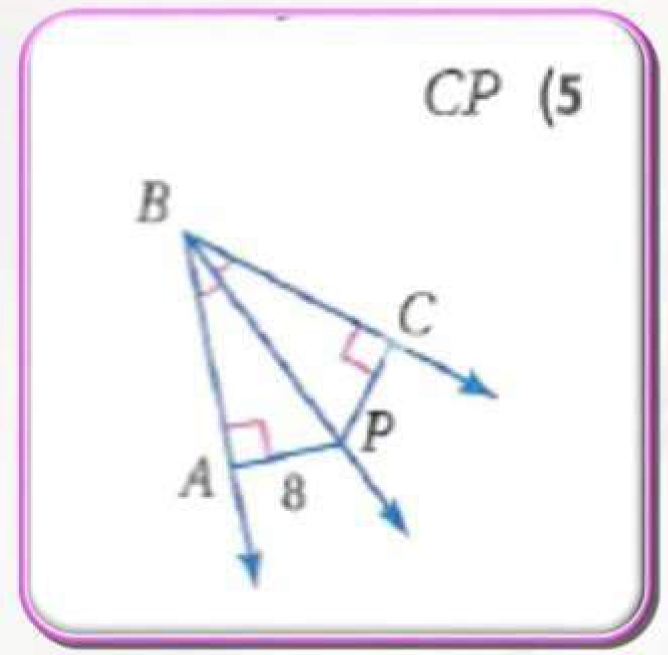








أوجد كل قياس مما يأتي





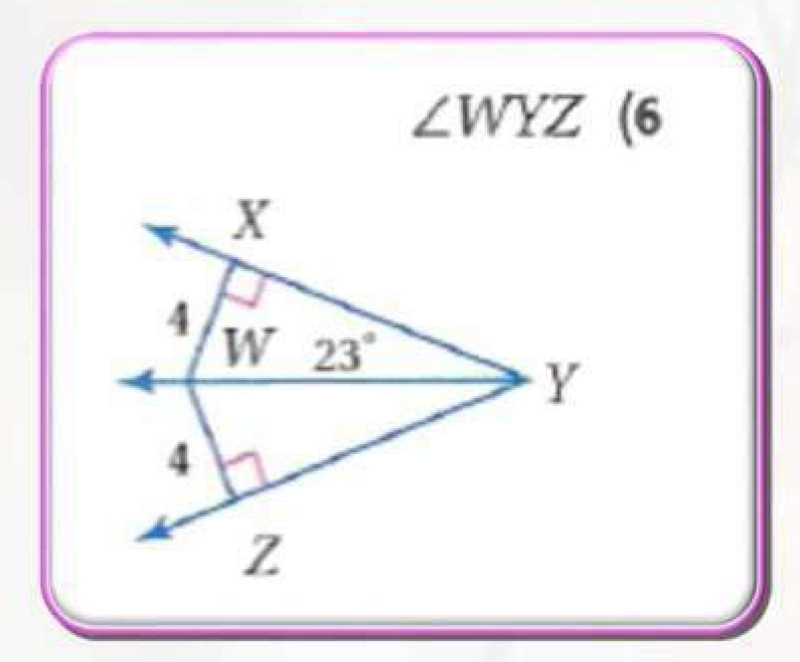
بما أن $\overrightarrow{PB}$ منصفاً لـ $\angle CBA$ و $PC \perp BC$, $PA \perp BA$ (نظرية منصف الزاوية)

فإن $PA = PC = 8$





أوجد كل قياس مما يأتي





بما أن $XY \perp WX$ و $ZY \perp WZ$ و $WZ = WX$

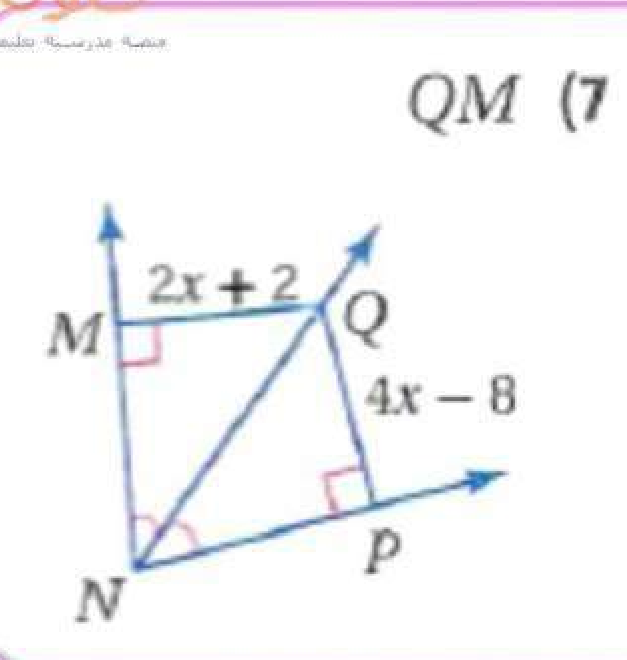
فإن $\overrightarrow{WY}$ ينصف $\angle XYZ$ (حسب عكس نظرية منصف الزاوية)

إذن $23^\circ = \angle WYZ$





أوجد كل قياس مما يأتي





بما أن $\overrightarrow{NQ}$ منصفاً لـ $\angle MNP$ و $QP \perp PN$ ، $QM \perp MN$ (حسب نظرية منصف الزاوية)

فإن $QP = QM$

$$4x - 8 = 2x + 2$$

$$4x - 2x = 2 + 8$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

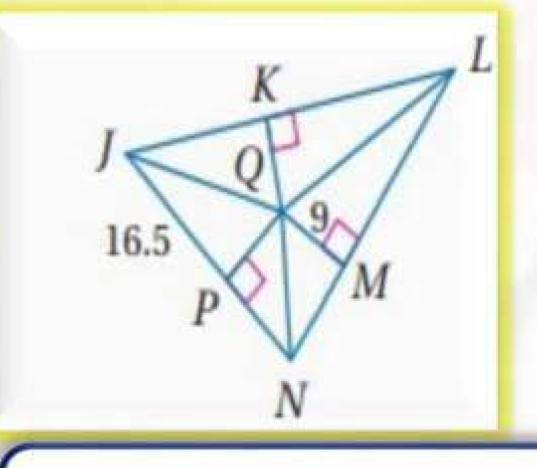
$$QM = 2x + 2 = 2 \times 5 + 2$$

$$QM = 12$$





8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.





بما أن Q مركز الدائرة الداخلية لـ ΔJLN

إذن $QK = QM = QP = 9$ وبالتالي يمكن حساب JQ بنظرية فيثاغورث.

$$(QJ)^2 = (QP)^2 + (PJ)^2$$

$$(QJ)^2 = (9)^2 \quad (16.5)^2$$

$$QJ \approx 18.8$$

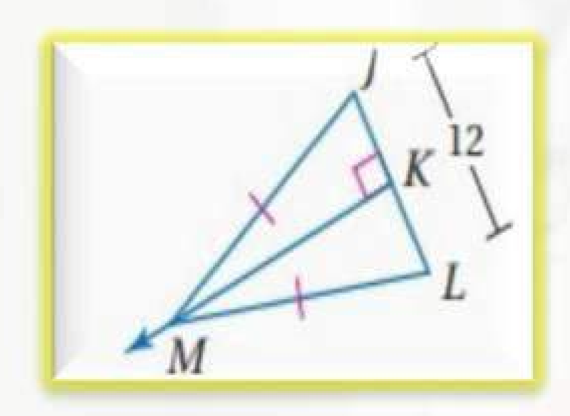


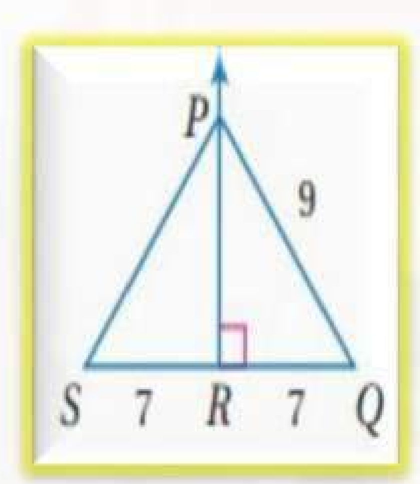
تدرب وحل المسائل

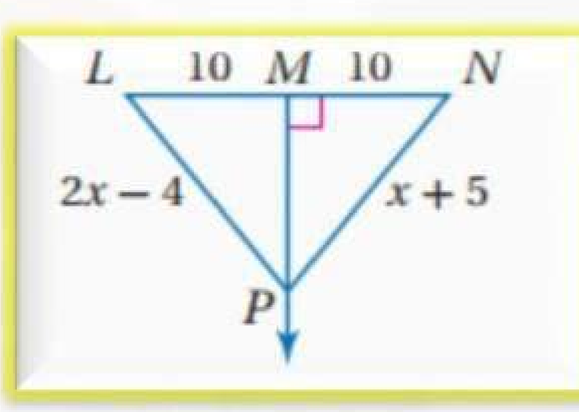


أوجد كل قياس مما يأتي

KL (11	PS (10	NP (9





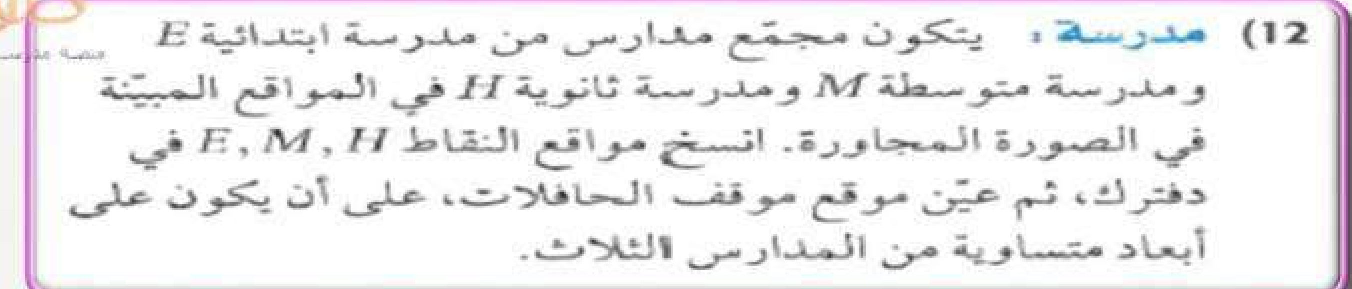


6

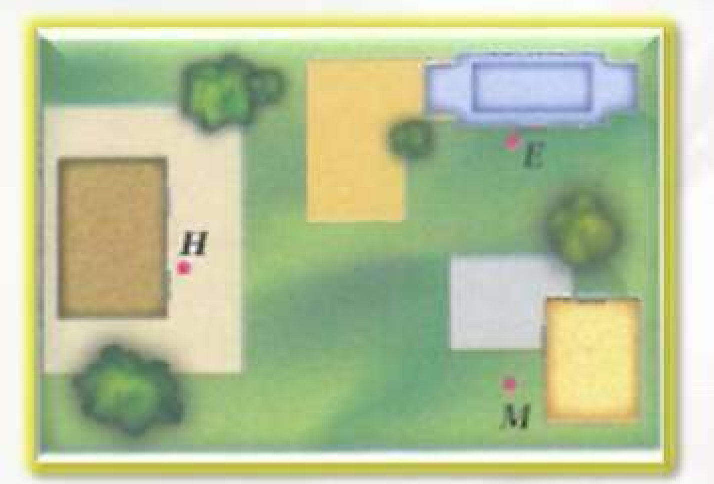
9

14



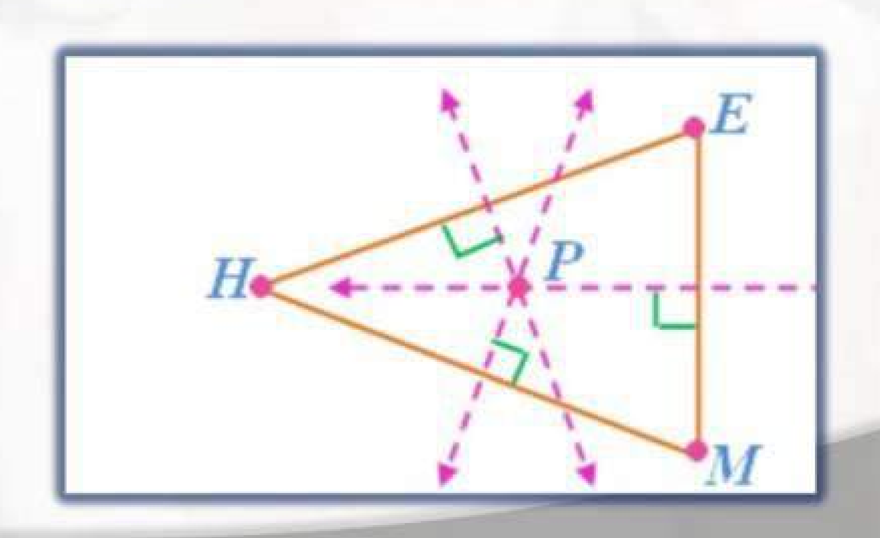








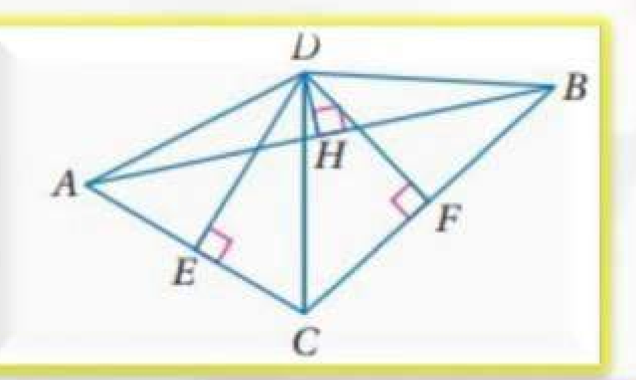
وضع نقطة تعبر عن الحافلة ولتكن P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ΔHEM (حسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث)إذن سيكون بعد النقطة عن كل ضلع من أضلاع المثلث متساوي



المثال ٣

النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

13) $\overline{AD}$ 14) $\overline{AH}$





13) بما أن D هي مركز الدائرة التي تمر برووس ΔABC إذن حسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤس المثلث:

$\overline{AD} \cong \overline{DC}, \overline{BD}$

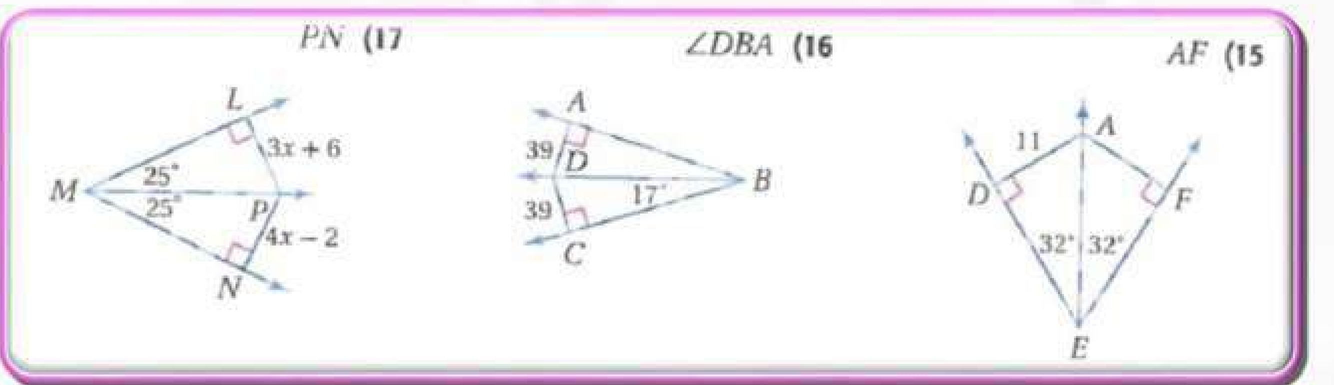
14) $\overline{DH}$ عمودي وينصف $\overline{AB}$.

$\overline{AH} \cong \overline{HB}$





أوجد قياس كل مما يأتي





بما أن $\overline{AF} \perp \overline{EF}$ و $\angle AEF = \angle AED$ إذن $AD = AF$

إذن $AF = 11$

بما أن $\overline{DC} \perp \overline{CB}, \overline{DA} \perp \overline{AB}$ و $DC = AD$ إذن $\angle DBC = \angle ABD$

حسب عكس نظرية منصف الزاوية .

إذن $\angle ABD = 17^\circ$

بما أن $\overline{PN} \perp \overline{MN}, \overline{PL} \perp \overline{LM}$ و $\angle PMN = \angle LMP$ إذن $PN = LP$

حسب نظرية منصف الزاوية .

$$4x - 2 = 3x + 6$$

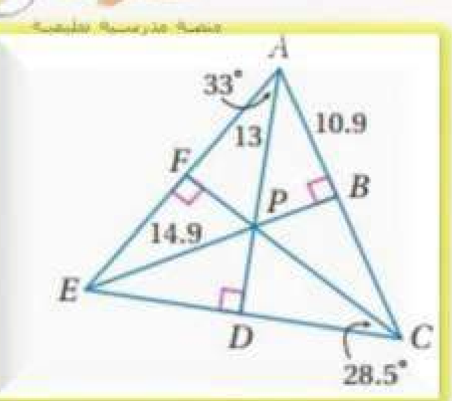
$$4x - 3x = 6 + 2$$

$$x = 8$$

$$PN = 4 \times 8 - 2$$

$$PN = 30$$







إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ$\triangle AEC$ ، فأوجد كلًا من القياسات الآتية :

18) PB

19) DE



18)

بما أن النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، إذن $PB = PD = PF$

يمكن إيجاد PB حسب نظرية فيثاغورث:

$$(AP)^2 = (AB)^2 + (PB)^2$$

$$(13)^2 = (10.9)^2 + (PB)^2$$

$$PB \approx 7.1$$

19)

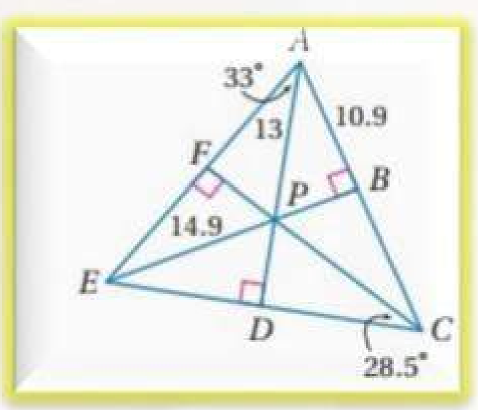
بما أن $PB = PD$ إذن باستعمال فيثاغورث:

$$(EP)^2 = (PD)^2 + (ED)^2$$

$$(14.9)^2 = (7.1)^2 + (ED)^2$$

$$ED \approx 13.1$$









$\angle DEP$ (21



(20

بما أن $\overline{AD} \perp \overline{EC}$ وينصف $\angle CAE$ إذن $\angle DAC = 33$

(21

بما أن $\overline{FC} \perp \overline{AE}$ وينصف $\angle ACE$ إذن $\angle ACE = 28.5 \times 2 = 57$

$\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

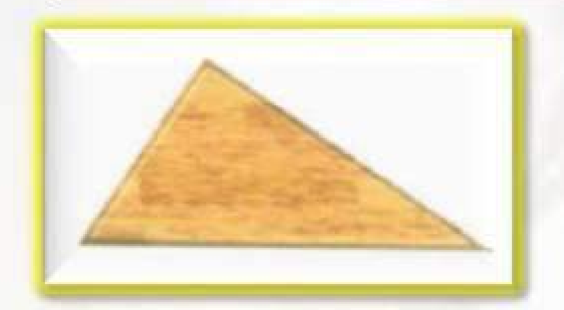
$$26 + 57 + \angle AEC = 180^\circ$$

$$\angle AEC = 97^\circ$$

بما أن $\overline{EP} \perp \overline{AC}$ وينصف $\angle AEC$ إذن $\angle DEB \frac{97}{2} = 48.5^\circ$

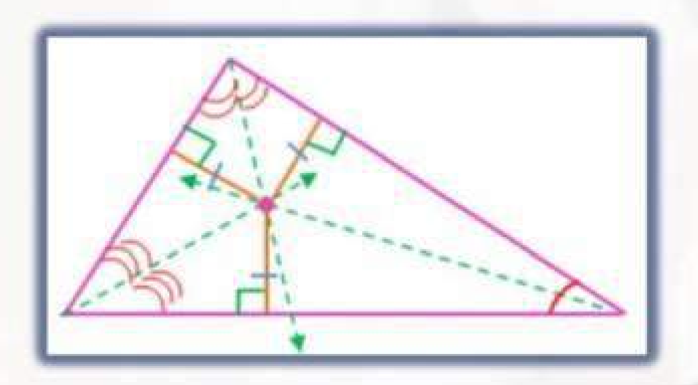


22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيّة عند مركز سطح الطاولة المبينة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.





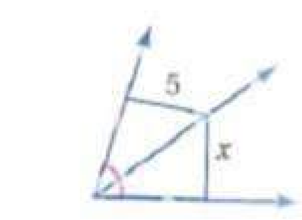
أجد نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث التي تمثل مركز الدائرة الداخلية للمثلث وتبعد أبعادا متساوية عن أضلاع المثلث.



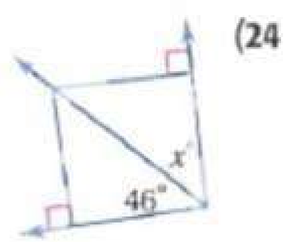


حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضّح إجابتك.

(23

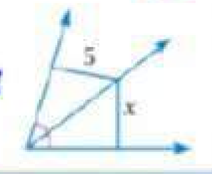


(24



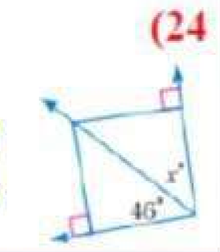
الحل

(23



لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان عموديتين على ضلعي الزاوية.

(24



لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان العموديتان على ضلعي الزاوية متساويتان أم لا.







(25

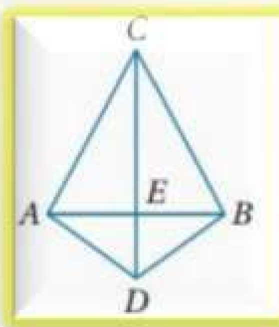
لا، يجب أن تعرف إن كان منصف القاعدة عموديا عليها.



(26

لا، يجب أن تعرف إن كان الوتران متساويين أم لا.





برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

المطلوب: النقطتان C, D تقعان على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)

2) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة).

3) $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (SSS)

4) $\angle ACD \cong \angle BCD$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

6) $\Delta CEA \cong \Delta CEB$ (SAS)

7) $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) E نقطة منتصف $\overline{AB}$ (تعريف نقطة المنتصف)

9) $\angle CEA \cong \angle CEB$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

10) $\angle CEB, \angle CEA$ متجاورتان على مستقيم



11) $\angle CEA$ ، $\angle CEB$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتجاورتين على مستقيم)

12) $m\angle CEA + m\angle CEB = 180^\circ$ (تعريف التكامل)

13) $m\angle CEA + m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

14) $2m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

15) $m\angle CEA = 90^\circ$ (خاصية القسمة)

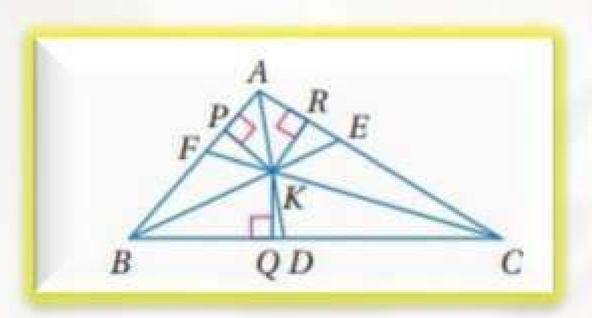
16) $\angle CEA$ ، $\angle CEB$ قائمتان (تعريف الزاوية القائمة)

17) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف المستقيمين المتعامدين)

18) $\overline{CD}$ عمود منصف $\overline{AB}$ (تعريف العمود المنصف)

19) D ، C واقعتان على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ (تعريف النقطة الواقعة على مستقيم).





28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصّفات لزوايا $\triangle ABC$،
$\overline{KP} \perp \overline{AB}$, $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$
$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $KP = KQ = KR$



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ ، $\overline{CF}$ منصفات لزاويا $\triangle ABC$ ،
$\overline{KQ} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{KP} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{KR} \perp \overline{AC}$ (معطيات)

2) $KP = KR$ ، $KQ = KR$ ، $KP = KQ$ (كل نقطة على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية)

3) $KP = KQ = KR$ (خاصية التعدي)

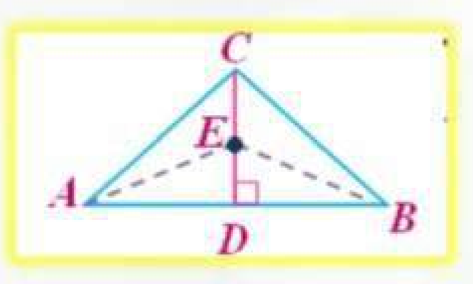


برهان: اكتب برهانًا حرًا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

29) النظرية 4.1

30) النظرية 4.5





(29

المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$.

E نقطة على $\overline{CD}$.

المطلوب: $EA = EB$

البرهان: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$ ومن تعريف المنصف فإن D نقطة منتصف $\overline{AB}$.

لذلك $\overline{BD} \cong \overline{AD}$ حسب نظرية نقطة المنتصف.

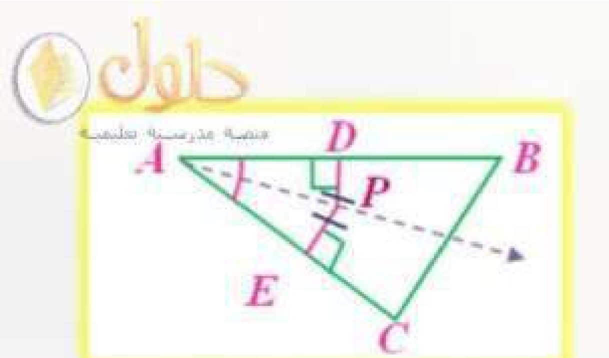
$\angle CDB ، \angle CDA$ قائمتان حسب تعريف العمود. وبما أن جميع الزوايا القائمة

متطابقة فإن $\angle CDB \cong \angle CDA$. وبما أن E نقطة على $\overline{CD}$

فإن $\angle EDB ، \angle EDA$ قائمتان ومتطابقتان. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{ED} \cong \overline{ED}$

إذن $\Delta EDB \cong \Delta EDA$ حسب SAS. وتكون $\overline{EB} \cong \overline{EA}$ لأن العناصر المتناظرة في

المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف التطابق ينتج أن $EA = EB$.



(30

المعطيات:

P نقطة داخل $\angle BAC$.

بعد النقطة P عن $\overline{AB}$ يساوي بعدها عن $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$.

البرهان: النقطة P تقع في داخل الزاوية $\angle BAC$، و $PD = PE$. ومن تعريف التطابق $\overline{PD} \cong \overline{EP}$ ، $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ و $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ لأن المسافة من نقطة إلى مستقيم تقاس على القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة.

$\angle ADP$ ، $\angle AEP$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين والمثلثان ADP ، AEP قائما الزاوية حسب تعريف المثلث قائم الزاوية. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{AP} \cong \overline{AP}$

. إذن، ΔADP ، ΔAEP متطابقان حسب LL.

$\angle DAP \cong \angle EAP$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة و $\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$ حسب تعريف منصف الزاوية.



31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيًا نقطتَي طرفَيها هما $B(4, 3)$ ، $A(-3, 1)$. ووضِّح إجابتك.



$A(-3,1), B(4,3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{4+3} = \frac{2}{7}$$

إذن ميل القطعة المستقيمة = $\frac{2}{7}$ لذلك فميل العمود المنصف = $\frac{-7}{2}$

نقطة المنتصف = $\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$$y = mx + b$$

$$2 = \frac{-7}{2} \times \frac{1}{2} + b$$

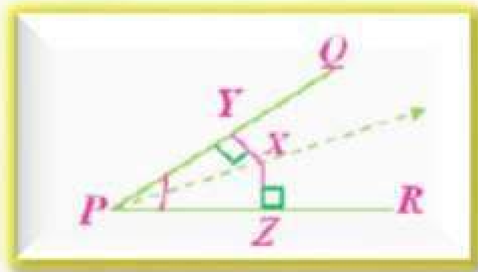
$$b = 2 - \frac{-7}{4} = \frac{15}{4}$$

إذن معادلة المستقيم هي: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$



32) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4.





المعطيات: PX تنصف $\angle QPR$.

$\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) PX تنصف $\angle QPR$ ، $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$ (معطيات)

2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)

3) $\angle PYX$ ، $\angle PZX$ قائمتان (تعريف التعامد)

4) $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزاويا القائمة متطابقة)

5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta PYX \cong \Delta PZX$ (AAS)

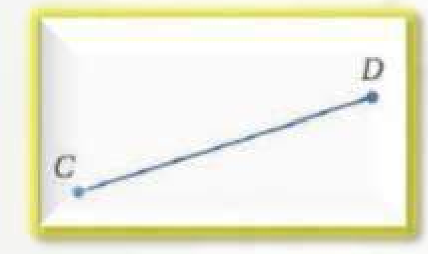
7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)



33) هندسة إحداثية: أوجد إحداثيَّي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك.



معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $y = 3$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $x = 5$.. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة (5,3) لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة (5,3)



34) المحل الهندسي: انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$، وصِف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كلٌّ منها بُعدين متساويين عن C, D



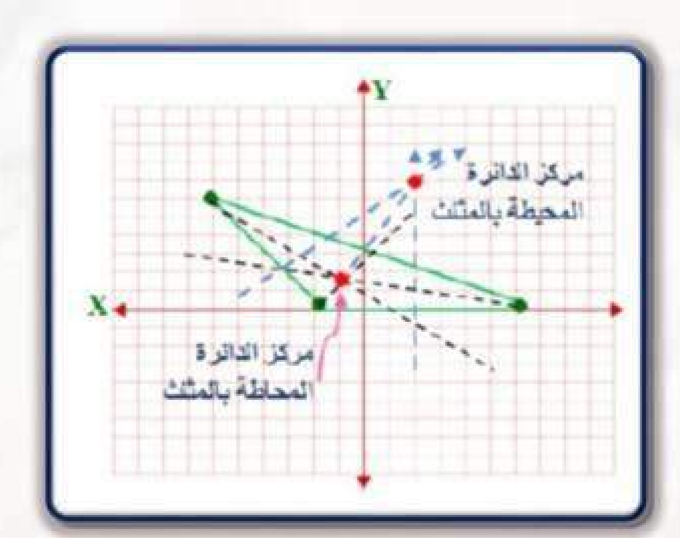
مستوى يعامد المستوى الذي تقع فيه القطعة $\overline{CD}$ وينصف $\overline{CD}$.





35) **مسألة مفتوحة :** ارسم مثلثًا، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتَي التلاقي.





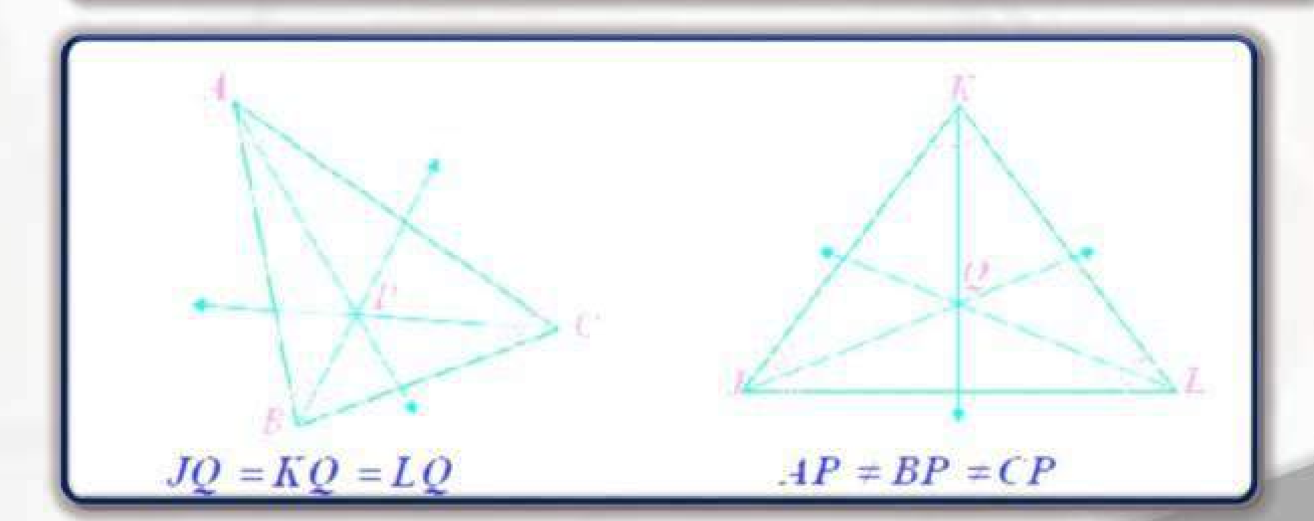


تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك.

36) تتقاطع منصّفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.



36) صحيحة أحيانا إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن هذه العبارة تكون صحيحة ولكن إذا كان المثلث متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع فإن العبارة خاطئة.

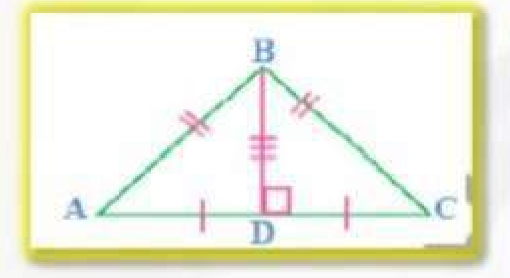




37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصّف للقاعدة منصّفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

الحل

37) صحيحة دائما.



المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين فيه

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\triangle ABC$ متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (معطى)

2) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (تعريف المثلث متطابق الضلعين)

3) $\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$

4) D نقطة منتصف AC. (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

6) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

7) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)

8) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

9) BD منصف لـ $\angle ABC$ (تعريف منصف الزاوية)



38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتَي التلاقي.



38)

ينصف كل منهما شيئا ما ولكن الأعمدة المنصفة تنصف القطع المستقيمة في حين تنصف منصفات الزوايا الزوايا. وتتقاطع كل منها عند نقطة. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصفة هي مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث. أما نقطة تلاقي منصفات الزوايا فهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث والتي تقع دائما داخل المثلث. أما مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث فيمكن أن يقع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



فيما سبق:

درستُ الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن:

- أتعرّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

القطعة المتوسطة
median

مركز المثلث
centroid

الارتفاع
altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

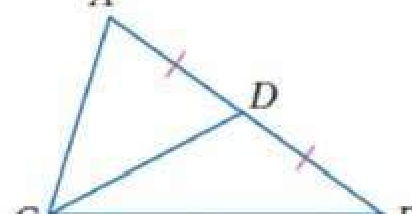
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يتزن على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو بحاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها. ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.



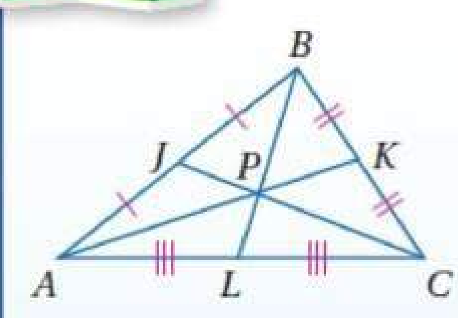


القطع المتوسطة: **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع دائمًا بداخله.

نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك



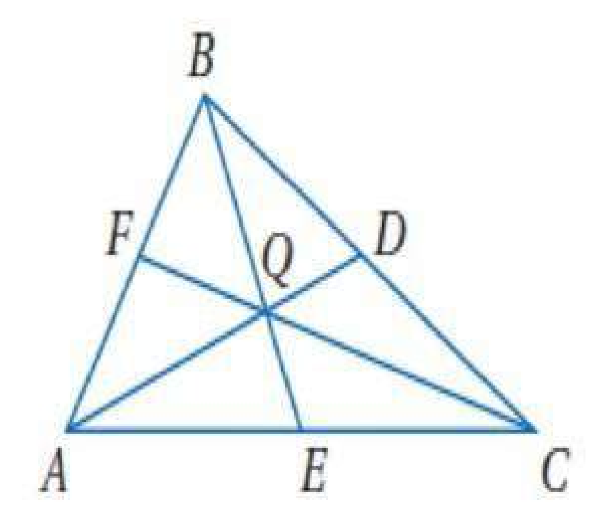
يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ

$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$

مثال 1 استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من BQ , QE .



$BQ = \frac{2}{3}BE$ نظرية مركز المثلث

$= \frac{2}{3}(9) = 6$ $BE = 9$

$BQ + QE = 9$ جمع القطع المستقيمة

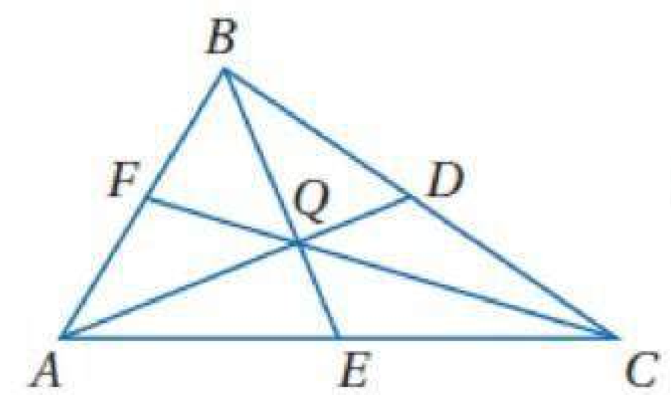
$6 + QE = 9$ $BQ = 6$

$QE = 3$ بطرح 6 من الطرفين





تحقق من فهمك



في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

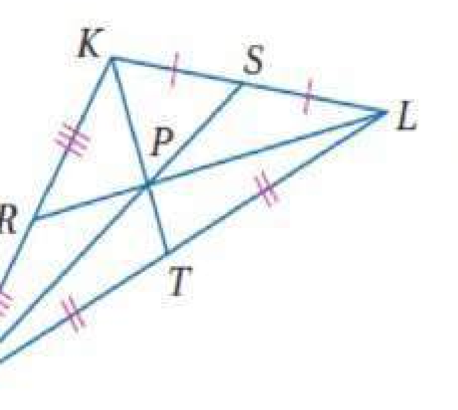
1A) FQ

5

1B) QC

10

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث



في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP.

بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$. وبالمثل نستنتج أن S, T نقطتا منتصفي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{JS}$, $\overline{KT}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$. لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	بطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين
$KP = 4$	بضرب الطرفين في 3

إرشادات للدراسة

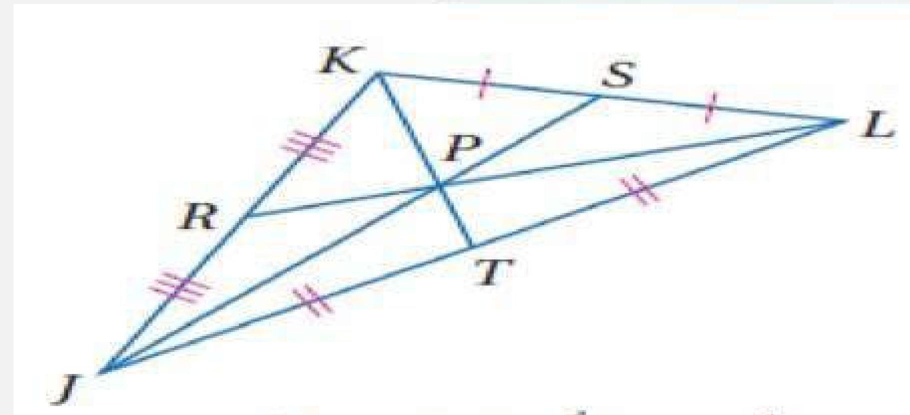
استعمال الحسّ العددي

في المثال 2 ، يمكنك أيضًا استعمال الحسّ العددي لإيجاد KT . بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$ ، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$ ؛ لذا فإذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.





تحقق من فهمك



في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $RP = 3.5$, $JP = 9$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

PL (2A

7

PS (2B

4.5

مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد المركز في المستوى الإحداثي



فن الأداء: يُخطط عبدالعزيز في مهرجان رياضي لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور. وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$.
فما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

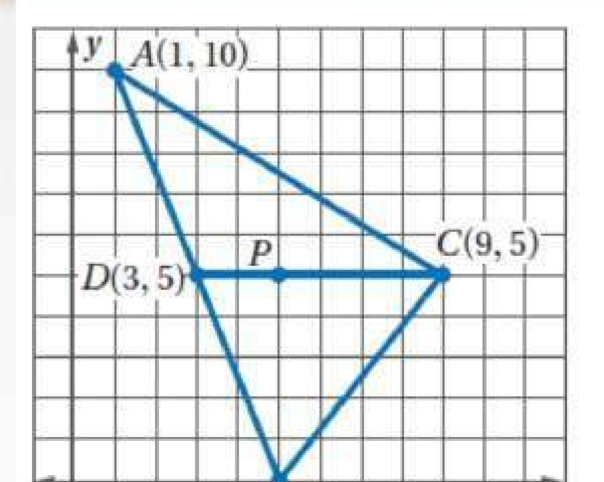
افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة. وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$. وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ لذا استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثلثي طول القطعة المتوسطة.

قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.



حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًا .

أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة. والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$، أيْ 6 وحدات.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$، أو 4 وحدات إلى اليسار من C. وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$، أيْ 7.5 وحدات. وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5، إذن P تقع على بعد 5 وحدات إلى الأعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓



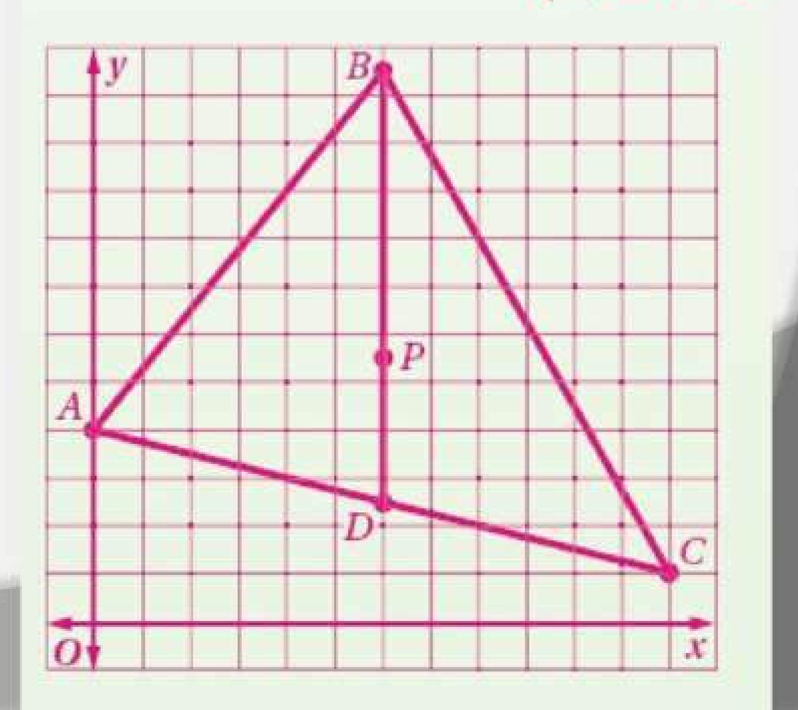


تحقق من فهمك

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(12, 1)$, $(6, 11.5)$, $(0, 4)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عنده هذا المثلث؟ وضّح إجابتك.



3) $(6, 5.5)$

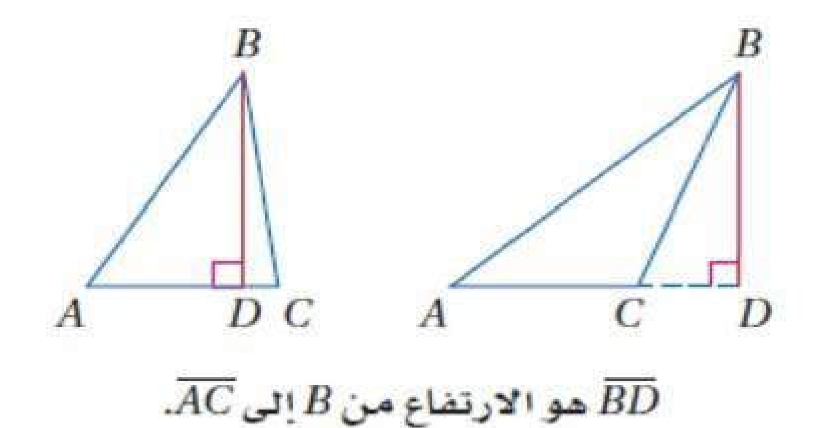


نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$ أو $D(6, 2.5)$.

وبما أنّ $\overline{BD}$ رأسيّة، فإن المسافة من B إلى D تساوي $11.5 - 2.5 = 9$، وبما أنّ $PB = \frac{2}{3}(9) = 6$، فإن P تبعد 6 وحداتٍ أسفل B؛ إذن إحداثيات النقطة P هي $(6, 11.5 - 6)$ أو $(6, 5.5)$.




ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس. ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحتويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ملتقى الارتفاعات

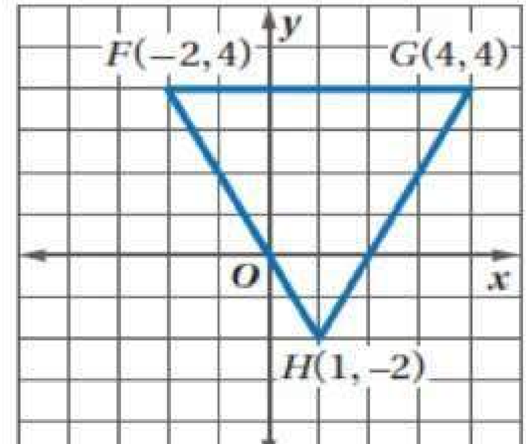
تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيِّ مثلث في نقطة تُسمّى **ملتقى الارتفاعات**.

مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC.

B, F, D, P, A, G, C

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثيَة : إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2,4)$, $G(4,4)$, $H(1,-2)$ ، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1 : مثّل $\triangle FGH$ بيانيًا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2 : أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$.

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $2 = \frac{4-(-2)}{4-1}$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$	$(x_1, y_1) = F(-2, 4)$, $m = -\frac{1}{2}$
$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$	بالتبسيط
$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$	خاصية التوزيع
$y = -\frac{1}{2}x + 3$	بإضافة 4 إلى الطرفين

الفصل الرابع

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $-2 = \frac{-2-4}{1-(-2)}$ ، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$	$(x_1, y_1) = G(4, 4)\ ,\ m = \frac{1}{2}$
$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$	خاصية التوزيع
$y = \frac{1}{2}x + 2$	بإضافة 4 إلى الطرفين

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x، فينتج أن $2y = 5$، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + 2$	معادلة الارتفاع من G
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$	بطرح $\frac{4}{2}$، أو 2 من الطرفين
$1 = x$	بضرب الطرفين في 2

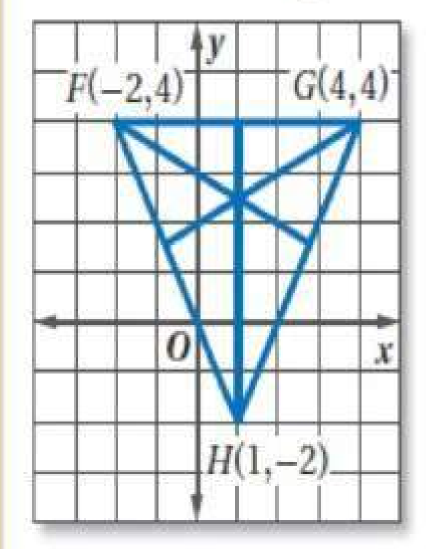
إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle JKL$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

الفصل الرابع

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

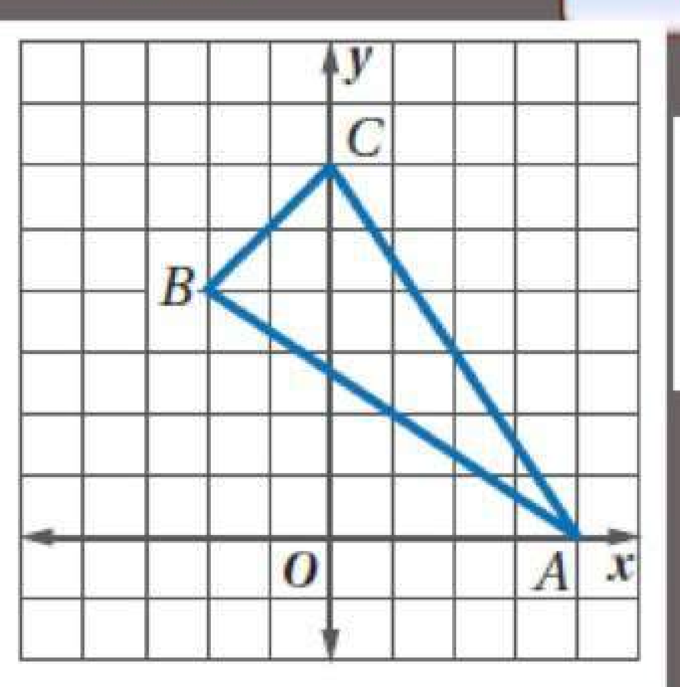
استعمل ركن ورقة لرسم الارتفاع لكل ضلع من أضلاع المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.



تحقق من فهمك



4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

$$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$$

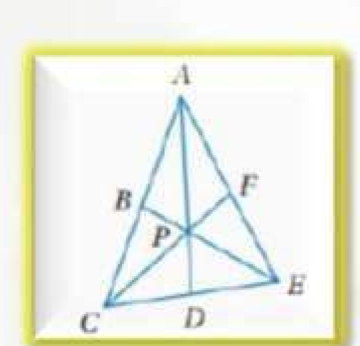
ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

قطع مستقيمة ونقاط خاصّة في المثلث

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصّية	مثال
العمود المنصّف		مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصّف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ،وتبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	





إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $PF = 6, AD = 15$.
فأوجد كلّ طول مما يأتي:

1) PC

2) AP

الحل

بما أن P هي مركز $\triangle ACE$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PC = \frac{2}{3}CF$$

$$PC = \frac{2}{3}(PF + CP)$$

$$PC = \frac{2}{3}(6 + CP)$$

$$PC = 4 + \frac{2}{3}CP$$

$$PC - \frac{2}{3}CP = 4$$

$$\frac{1}{3}CP = 4$$

$$CP = 12$$

$$AP = \frac{2}{3}AD$$

$$AP = \frac{2}{3} \times 15$$

AP = 10

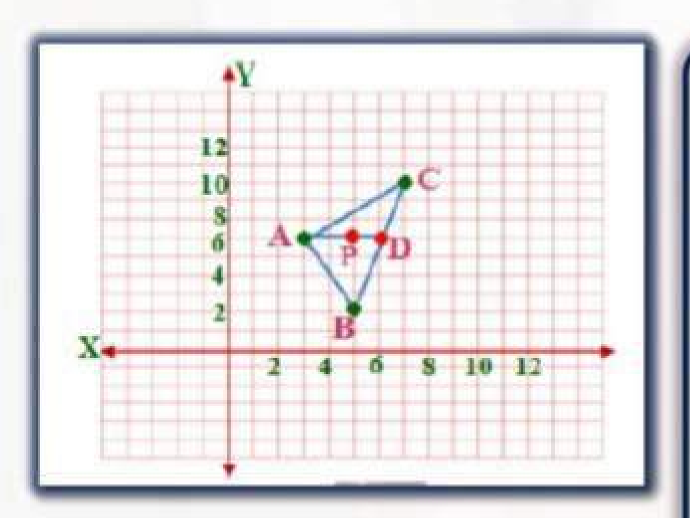




3) **تصميم داخلي:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط (7, 10) ,(5, 2) ,(3, 6) فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟







بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC.

$A(3.6).B(5.2).C(7.10)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{BC}$

$B(5.2).C(7.10)$

$$D\left(\frac{5+7}{2}.\frac{10+2}{2}\right)=D(6.6)$$

المسافة من $D(6.6)$ إلى $A(3.6)$ تساوي $3-6$ أي ٣ وحدات.

واذا كانت P هي مركز $\triangle ABC$ فإن $AP=\frac{2}{3}AD$. ولذلك يقع المركز على بعد

$3\times\frac{2}{3}$ أو ٢ وحدة إلى اليمين من A. وتكون احداثيات P هي (5.6)

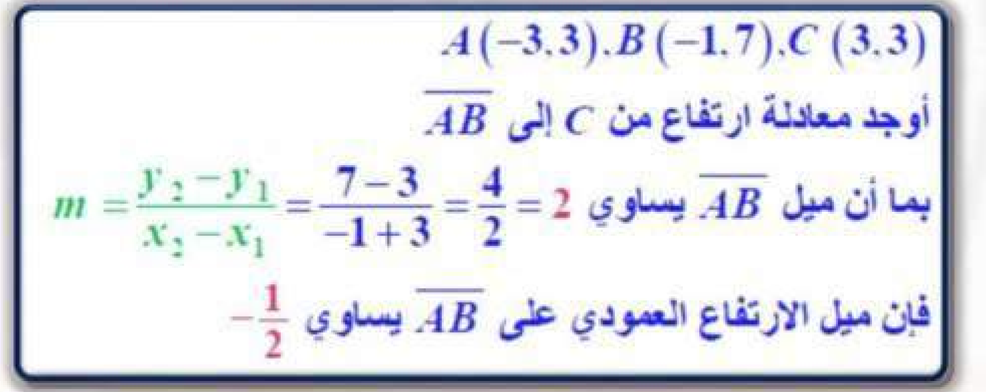
إذن يتوازن المثلث عند النقطة (5.6)





4) **هندسة إحداثية :** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$،





صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$C(3,3),\ m = -\frac{1}{2}$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow 1$



معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي -1 $= \frac{-4}{4} = \frac{3-7}{3+1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي 1

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$A(-3,3),\ m = 1$

$y - 3 = 1(x + 3)$

$y - 3 = x + 3$

$y = x + 6 \rightarrow 2$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$y = x + 6$

$0 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}$

$x = -1$

$y = x + 6$

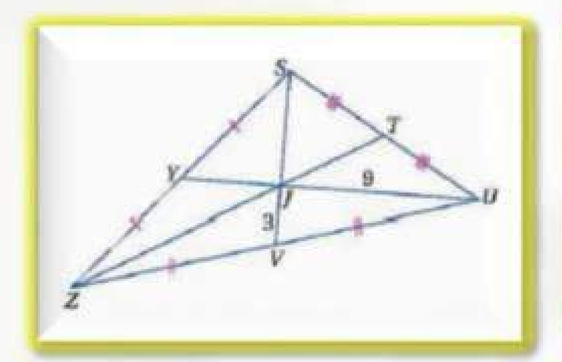
$y = -1 + 6$

$y = 5$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(-1,5)$







في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كلّ طول مما يأتي:

5) YJ	6) SJ
7) YU	8) SV
9) JT	10) ZJ



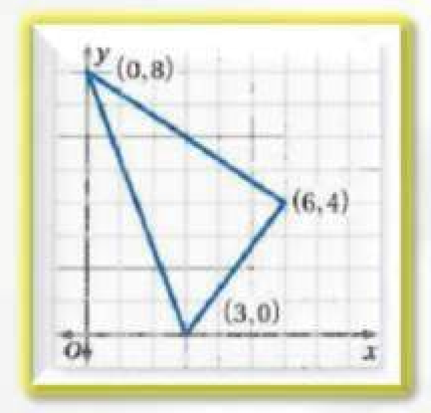
الحل

4.5	6
13.5	9
6	12





11) **تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحةً مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبّت الخيط؟





(3,4)

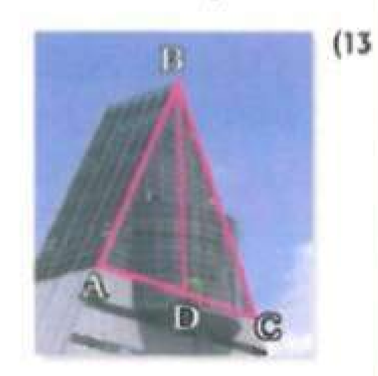
12) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:
$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$



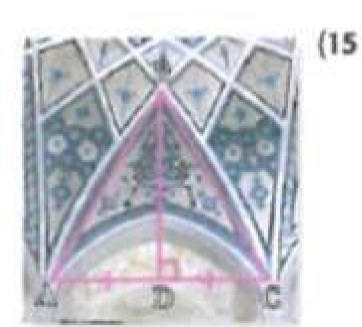
(5,-1)



صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13) 

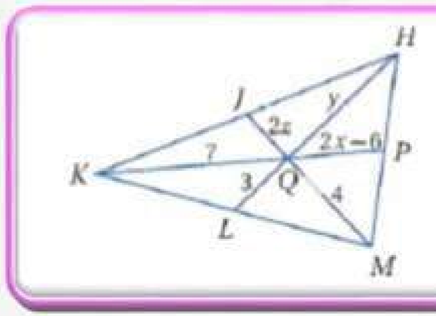
14) 

15) 

الحل

ارتفاع قطعة متوسطة عمود منصف

16) جبر: في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$, $\overline{HM}$, $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z.

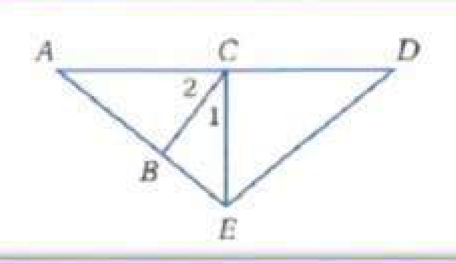




X= 4.75,
Y= 6 ,
Z=1



17) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعًا لـ $\triangle AED$، $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$ ، $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$، فأوجد كلًّا من $m\angle 1$, $m\angle 2$.





$$m\angle 1 = 35^\circ, m\angle 2 = 55^\circ$$

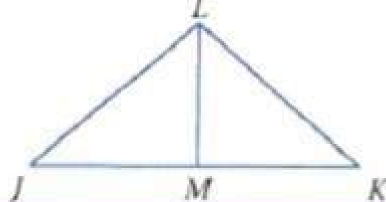
في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودًا منصّفًا، أو قطعة متوسطة، أو ارتفاعًا لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:

18) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$

19) $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

20) $\overline{JM} \cong \overline{KM}$

21) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$, $\overline{JL} \cong \overline{KL}$





ارتفاع

عمود منصف وقطعة متوسطة وارتفاع

قطعة متوسطة

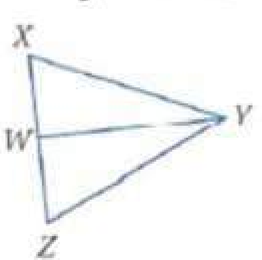
عمود منصف وقطعة متوسطة وارتفاع



22) برهان: اكتب برهانًا حرًا.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$، $\overline{WY}$ تنصّف $\angle Y$

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.





البرهان: بما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ومن تعريف منصف الزاوية تعلم أن $\angle XYW \cong \angle ZYW$ كما أن $\overline{YW} = \overline{YW}$ حسب خاصية الانعكاس. لذلك وبحسب SAS يكون $\triangle XYW \cong \triangle ZYW$.
إذن $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة وحسب نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



العبارات (المبررات)





1) $\overline{ZQ}, \overline{YS}, \overline{XR}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$ (معطيات)

2) $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية مركز المثلث)

3) $XR = XP + PR$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

4) $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (بالتعويض)

5) $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)

6) $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

7) $XP = 2RP$ (خاصية الضرب)

8) $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)



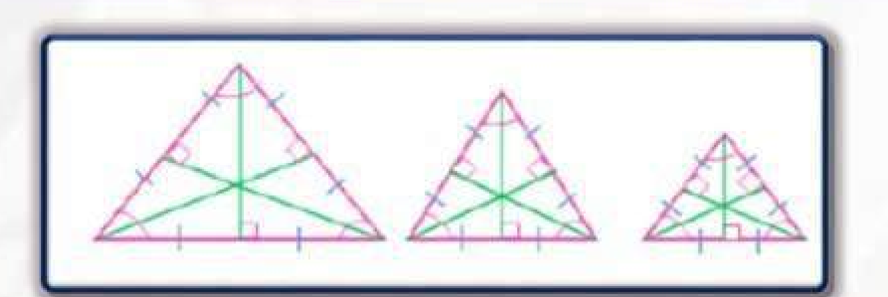
24) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

a) **عمليًا:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفة بعضها عن بعضٍ على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِ كل مثلث لتحدّد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

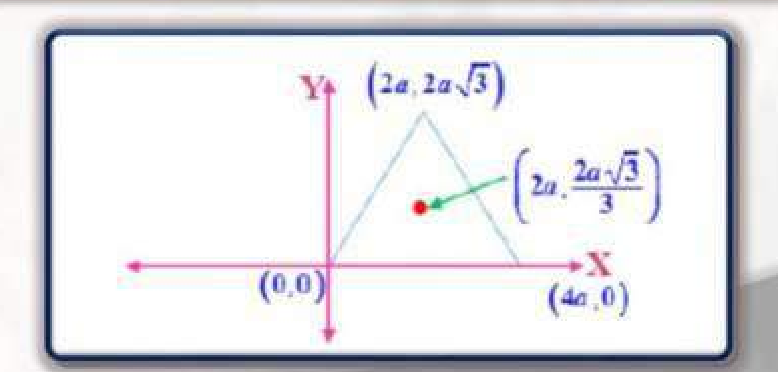
b) **لفظيًا:** خمّن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

c) **بيانيًا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطةٍ منها.

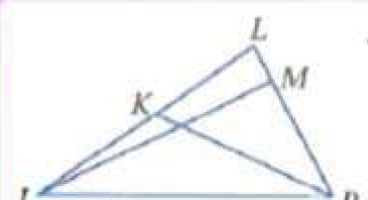




نقطة التلاقي الأربع للمثلث متطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.







جبر: في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = (3x-6)^\circ$, $JK = 3y-2$, $LK = 5y-8$.

25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعًا لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

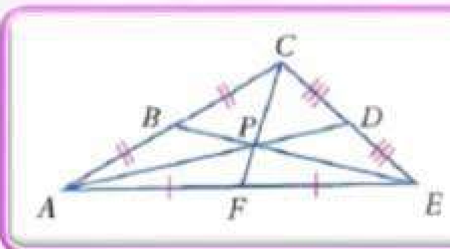
26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .



32

7





27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور.

ولكن عبد الكريم لم يوافقه في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



إجابة عبد الكريم هي الصحيحة فحسب نظرية مركز المثلث $AP = \frac{2}{3}AD$ وقد بدلت أطوال القطع المستقيمة.

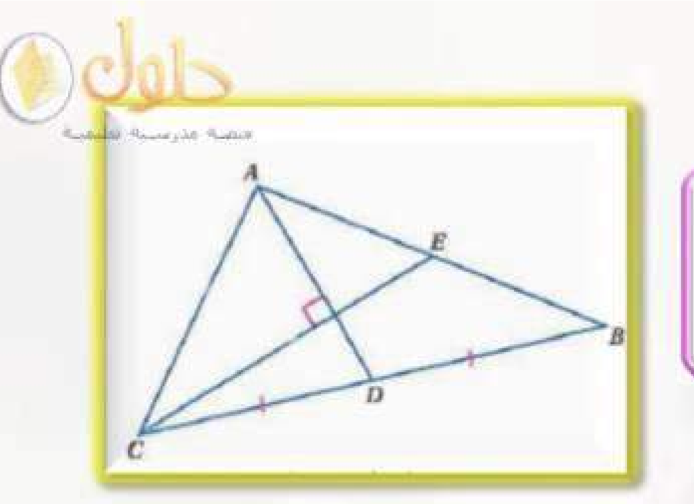


28) تبرير: هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالًا مضادًا.
"ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة".



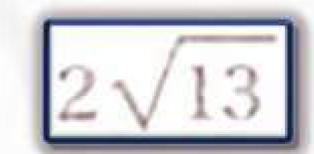
صحيحة؛ إجابة ممكنة: في المثلث قائم الزاوية، يكون الارتفاعان المرسومان من رأسي الزاويتين الحادتين هما ساقي المثلث اللذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة.

وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس فإن الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. لذلك فرأس الزاوية القائمة هو دائماً ملتقى الارتفاعات.



29) **تحدٍ:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ، فأوجد CA





30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.



إجابة ممكنة: بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متساويين في المساحة، فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة. ولموازنة مثلث على نقطة، عليك أن تجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة.

ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفي ضلعين متقابلين فيه، لأن كل قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.



٤-٣ المتباينات في المثلث
Inequalities in one Triangle

فيما سبق:

درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمىّ التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع. ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.



متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.







أضف إلى مطويتك

تعريف المتباينة

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$.

مثال إذا كان $3 + 2 = 5$ ، فإنّ $3 < 5$ وَ $2 < 5$.

وفي الجدول أدناه قائمة ببعض خصائص المتباينات التي درستها.

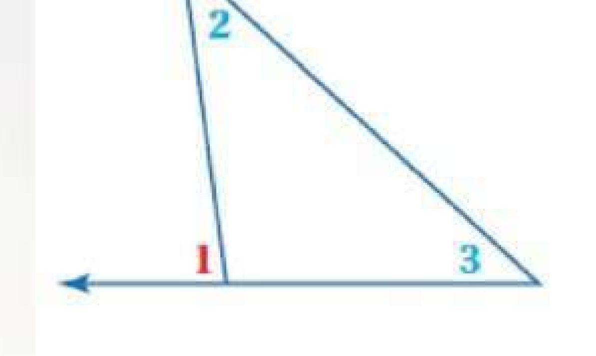
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c.

خاصيّة المقارنة	$a > b$ أو $a = b$ أو $a < b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b, b > c$ فإن $a > c$.
خاصية الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.



يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.

تأمّل $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ في الشكل المجاور.

تعلم من نظرية الزاوية الخارجيّة أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$.

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة نستنتج أن:



وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:



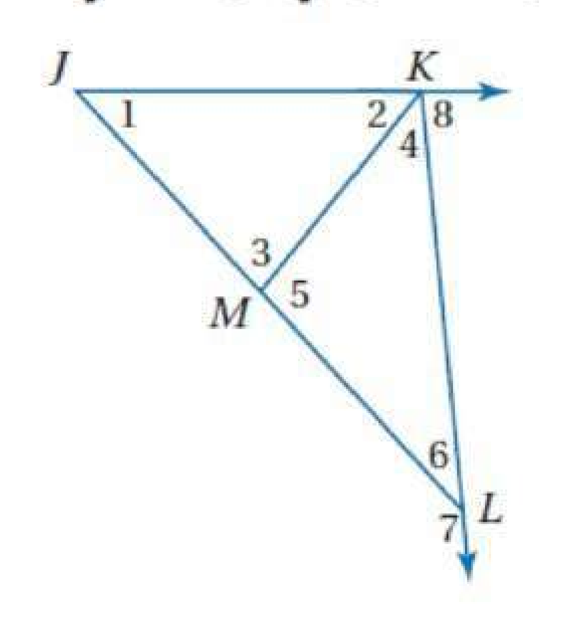
الزاويتان الداخليتان البعيدتان

لكل زاوية خارجيّة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.



مثال 1 استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 5$, $\angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

$m\angle 7 > m\angle 4 \ , \ m\angle 7 > m\angle 5$.

وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$، والزاويتان $\angle JKL$, $\angle 1$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$ ، $m\angle 7 > m\angle JKL$. وبما أنّ $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$، وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$ ؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

الفصل الرابع

b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أن $\angle 8$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$ ؛ لذا فقياس كل من $\angle 8$, $\angle 3$ أكبر من $m\angle 6$.



تحقق من فهمك

1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$

$\angle 2$

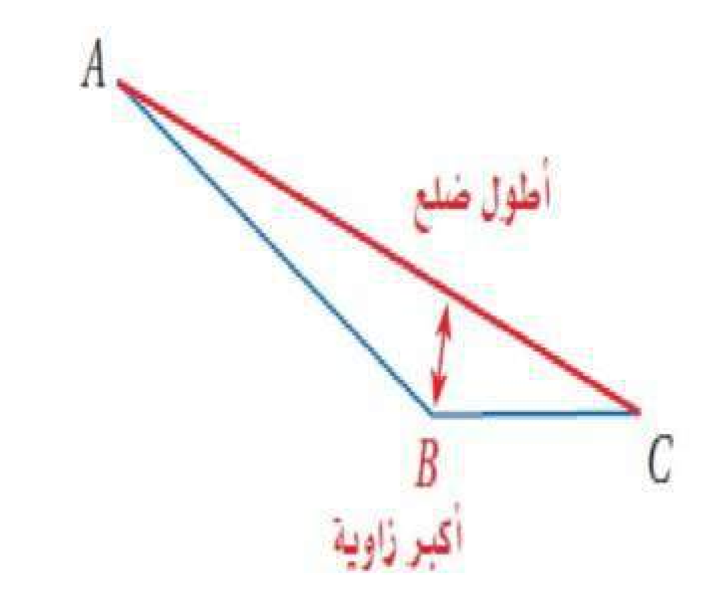
تنبيه !

تحديد الضلع المقابل

انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة. فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلاً لها.

متباينتا زاوية-ضلع: تعلمت في الدرس 6-3، أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان . ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

A أصغر زاوية
B C
أقصر ضلع



لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا .



٤-٣ المتباينات في المثلث
Inequalities in one Triangle

نظريتان

أضف إلى مطويتك

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

4.9 إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

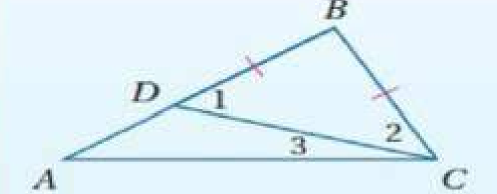
مثال بما أن $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.

4.10 إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

مثال بما أن $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.

برهان

النظرية 4.9



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين. وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 2 \cong \angle 1$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

واعتمادًا على مسلمة جمع الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle 1 > m\angle A$ ، $m\angle BCA > m\angle 1$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.



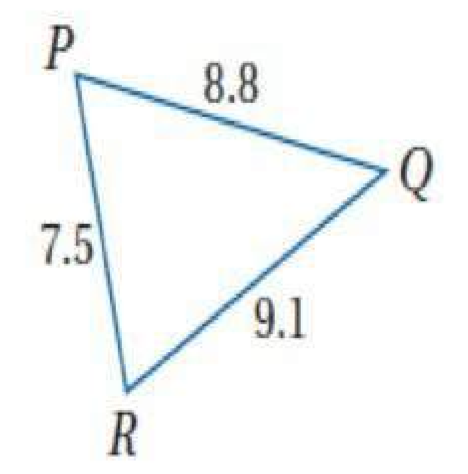
تنبيه!

رمزا الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$)، وخاصّة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

الفصل الرابع





اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

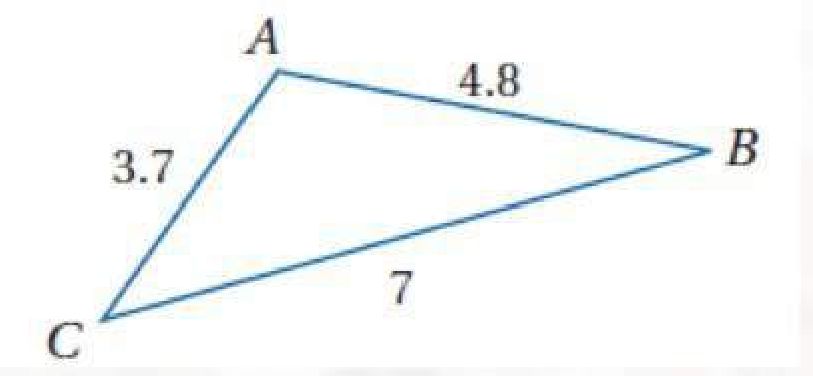
الأضلاع مرتَّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{QR}, \overline{PQ}, \overline{PR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle P, \angle R, \angle Q$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle P, \angle R, \angle Q$





تحقق من فهمك

2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ وأضلاعه مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.



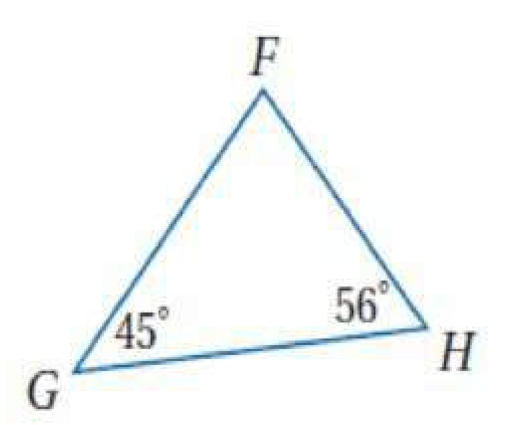
الأضلاع بالترتيب هي: $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{CB}$

الزوايا بالترتيب هي: $\angle B, \angle C, \angle A$





مثال 3 ترتيب أضلاع المثلث وفقًا لأطوالها



اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتّبة من الأقصر إلى الأطول.

أجد أولًا قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$ على الترتيب.

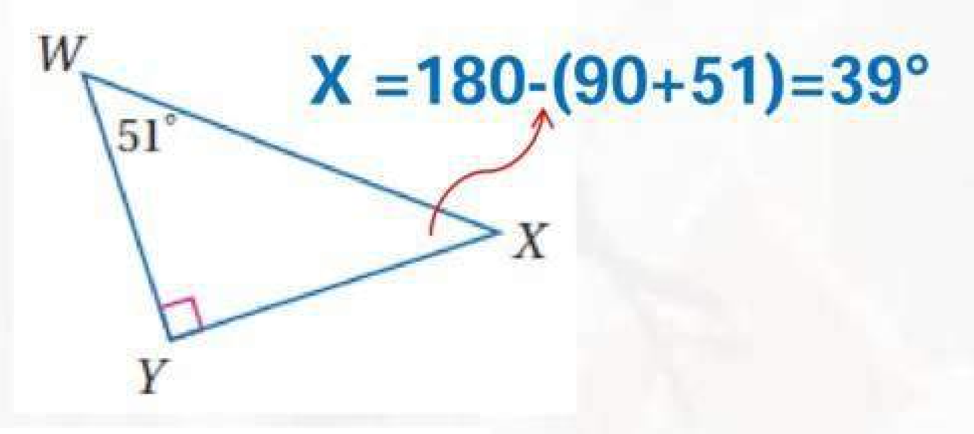
إذن فالأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$.





تحقق من فهمك

3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



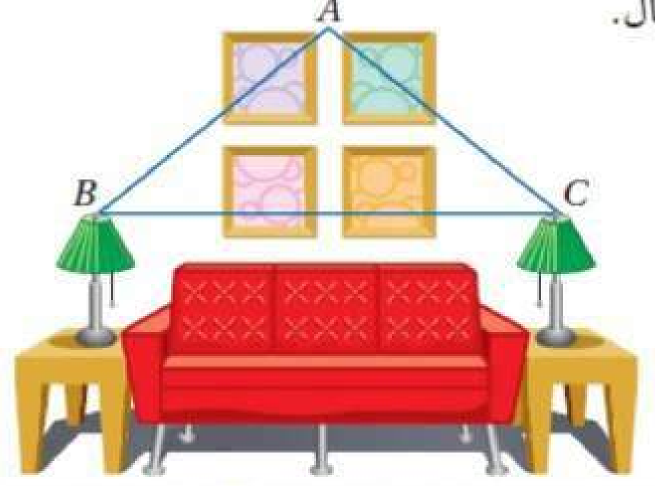
$\overline{WY}, \overline{YX}, \overline{WX}$

$\angle X, \angle W, \angle Y$



مثال 4 من واقع الحياة — العلاقات بين الزوايا والأضلاع

تصميم داخلي: يستعمل مصمّم التثليث؛ لترتيب غرفة الاستقبال. فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسِّر إجابتك



بحسب النظرية 4.10، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لِـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$، فإنّ $BC > AC$؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبر من المسافة بين النقطتين A, C.



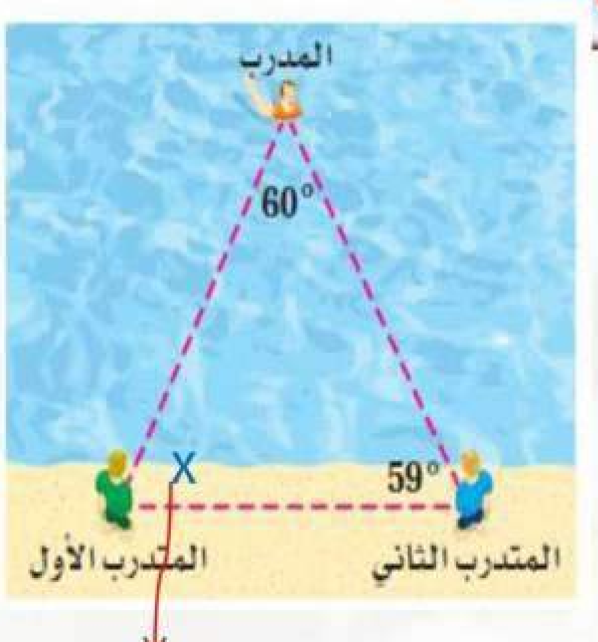
الربط مع الحياة

تتضمن برامج إعداد المنقذين في السباحة تدريباً على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدّة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعة تبعًا لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.





تحقق من فهمك



$X = 180-(60+59)=61°$

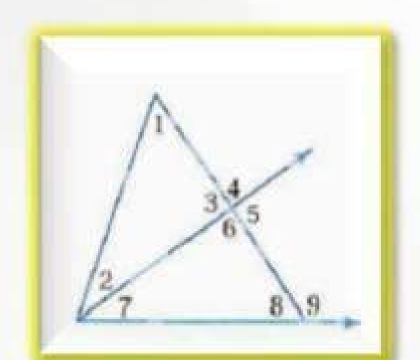
4) **سبَاحو الإنقاذ:** يُمثّل المدرّب في أثناء التدريب على الإنقاذ، شخصًا في خطر ليتمكن المتدربان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدربان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأي المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟

المتدرب الأول









استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :

1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$.



(1

$\angle 2 + \angle 1 = \angle 4$ نظرية الزاوية الخارجة

إذن حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 4 > \angle 1$

$\angle 4 > \angle 2$

إذن $m\angle 2$ ، $m\angle 1$ أقل من $m\angle 4$

(2

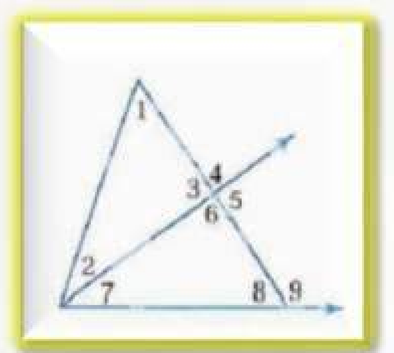
حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 9 > \angle 7$

$\angle 5 > \angle 7$

$\angle 3 > \angle 7$





3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

4) قياساتها أقل من $m\angle 9$.



3)

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 9 > \angle 2$

$\angle 6 > \angle 2$

$\angle 4 > \angle 2$

4)

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 6 < \angle 7$

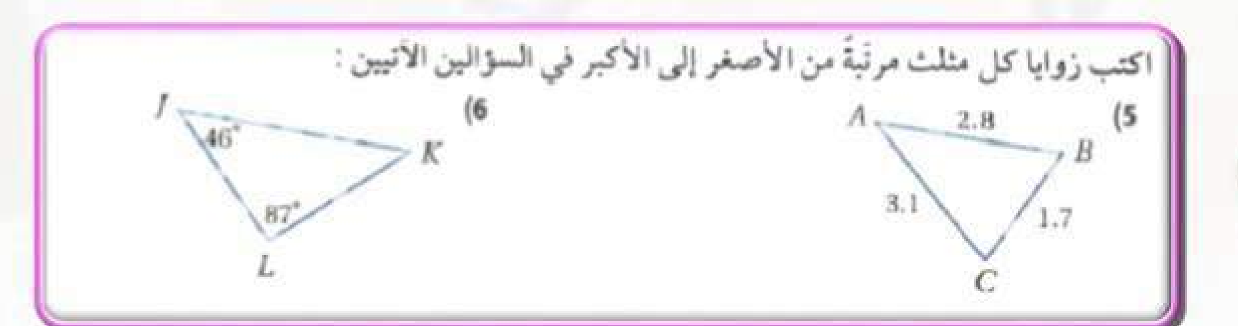
$\angle 7 < \angle 7$

$\angle 2 < \angle 7$

$\angle 1 < \angle 7$









الأضلاع مرتبة من الأصغر إلى الأكبر: $\overline{BC}$ ، $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$

وحسب نظرية ٥.٩ : الزوايا من الأصغر إلى الأكبر: $m\angle A$ ، $m\angle C$ ، $m\angle B$

في ΔJLK :

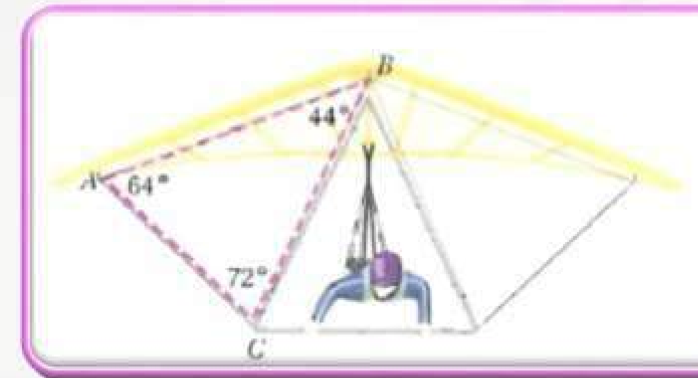
$m\angle K = 180^\circ - (46^\circ + 87^\circ) = 47^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبةً هي: $m\angle J$ ، $m\angle K$ ، $m\angle L$

حسب نظريةَ ٥.١٠ : الأضلاع مرتبة هي: $\overline{KL}$ ، $\overline{JL}$ ، $\overline{JK}$



المثال ٤



7) **طيران شراعي:** تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة. فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.



بما أن الزاوية المقابله للضلع $\overline{BC}$ أكبر من الزاوية المقابله للضلع $\overline{AC}$

إذن حسب نظرية ٤,٩ : $\overline{BC}$ أطول من $\overline{AC}$









استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطَى في كلٍّ مما يأتي:

8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

9) قياساتها أقل من $m\angle 4$.



(8

$\angle 4 = \angle 2 + \angle 1$

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 4 > \angle 2$

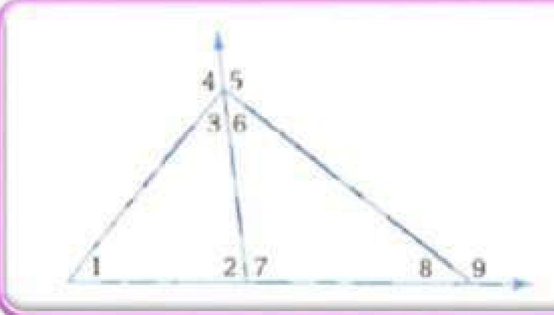
(9

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 2 < \angle 4$

$\angle 1 < \angle 4$





10) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.



(10

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 1 < \angle 9$

$\angle 3 < \angle 9$

$\angle 6 < \angle 9$

$\angle 7 < \angle 9$

(11

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 2 > \angle 9$

$\angle 4 > \angle 9$

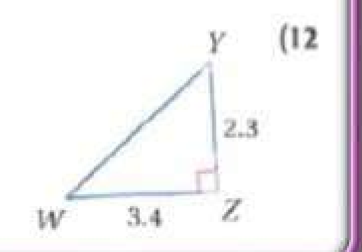
$\angle 5 > \angle 9$



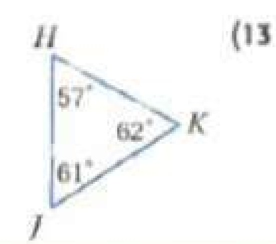
المثالان ٣،٢

اكتب زوايا كل مثلث مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:

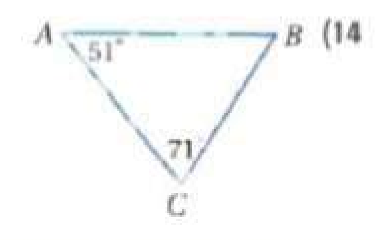
12)



13)



14)





الأضلاع مرتبة: $\overline{YZ}, \overline{WZ}, \overline{WY}$

وحسب نظرية ٩.٤: الزوايا مرتبة: $\angle W, \angle Y, \angle Z$

الزوايا مرتبة: $\angle H, \angle J, \angle K$

وبحسب نظرية ٤.١٠: الأضلاع مرتبة هي: $\overline{JK}, \overline{HK}, \overline{HJ}$

$\angle B = 180° - (51° + 71°) = 58°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبةً: $\angle A, \angle B, \angle C$

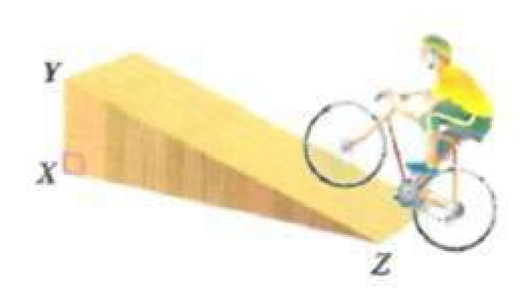
وبحسب نظرية ٤.١٠: الأضلاع مرتبة هي: $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$





15) **كرة قدم:** يقف أحمد وخالد وماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه، ويريد ماهر أن يمرِّر الكرة إلى أحد زميلَيه، على أن تكون مسافة التمرير أقصر. أيهما يختار: خالد أم أحمد؟ برِّر إجابتك.

16) **منحدرات:** يمثِّل المنحدر طريقا للدراجات الهوائية. فأيُّهما أطول؛ طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$؟ وضِّح إجابتك باستعمال النظرية 4.9.



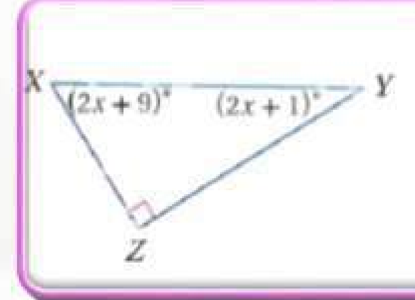


إجابة ممكنة: باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، فإن قياس الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة من ماهر إلى خالد°70. وبما أن 70 > 48، فإن المسافة من ماهر إلى إحمد ستكون هي الأقصر. وهذا يعني أن ماهر سيختار أحمد ليمرر له الكرة.

بما أن $m\angle X = 90°$ فإن $m\angle Y + m\angle Z = 90°$ إذن $m\angle Y < 90°$ بحسب تعريف المتباينة لذا فإن $m\angle X > m\angle Y$ أي أن الضلع الذي يقابل $\angle X$ أطول من الضلع الذي يقابل $\angle Y$. وبما أن $\overline{YZ}$ يقابل $\angle X$ و $\overline{XZ}$ يقابل $\angle Y$ فإن $\overline{XZ} < \overline{YZ}$ وهذا يعني أن السطح العلوي للمنحدر أطول من طول المنحدر.



17) اكتب زوايا المثلث المجاور مرتبة من الأصغر إلى الأكبر :





بما أن $m\angle Z = 90^\circ$ فإن $m\angle X + m\angle Y = 90^\circ$ إذن

$$(2x+1)+(2x+9)=90^\circ$$

$$4x+10=90$$

$$4x=80$$

$$x=20$$

$$\angle Y = 2\times 20+1=41^\circ$$

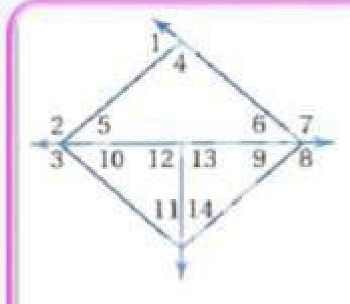
$$\angle X = 2\times 20+9=49^\circ$$

إذن الزوايا مرتبة: $\angle Z$ ، $\angle X$ ، $\angle Y$

وبحسب نظرية ٤،١٠: الأضلاع مرتبة هي: $\overline{XY}$ ، $\overline{YZ}$ ، $\overline{XZ}$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدِّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي:



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

19) $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

20) $\angle 7, \angle 4, \angle 5$

21) $\angle 3, \angle 11, \angle 12$

22) $\angle 3, \angle 9, \angle 14$

23) $\angle 8, \angle 10, \angle 11$







20) $\angle 7$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

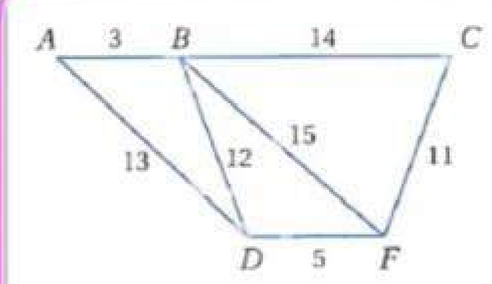
21) $\angle 3$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

22) $\angle 3$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

23) $\angle 8$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية :



24) $\angle ABD, \angle BDA$ 25) $\angle BCF, \angle CFB$

26) $\angle BFD, \angle BDF$ 27) $\angle DBF, \angle BFD$



(24

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle ABD$ أكبر من الضلع المقابل لـ $\angle BDA$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle ABD > m\angle BDA$

(25

بما أن الضلع المقابل لـ $m\angle BCF$ أكبر من الضلع المقابل لـ $\angle CFB$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle BCF > m\angle CFB$

(26

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle BFD$ أصغر من الضلع المقابل لـ $\angle BDF$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle BFD < m\angle BDF$

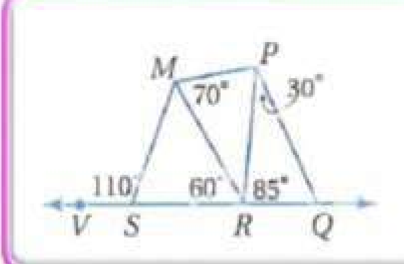
(27

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle DBF$ أصغر من الضلع المقابل لـ $\angle BFD$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle DBF < m\angle BFD$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



28) $\overline{SM}, \overline{MR}$ 29) $\overline{RP}, \overline{MP}$ 30) $\overline{RQ}, \overline{PQ}$



28)

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{MR} = (180° - 110° = 80°)$ وهي أكبر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{SM}$ إذن حسب نظرية ١٠,٤: $\overline{MR} > \overline{SM}$

29)

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{RP}$ وهي أكبر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{MP}$ التي تساوي ٣٥ حسب نظرية زوايا المتجاورة على مستقيم.

إذن حسب نظرية ١٠,٤: $\overline{RP} > \overline{MP}$

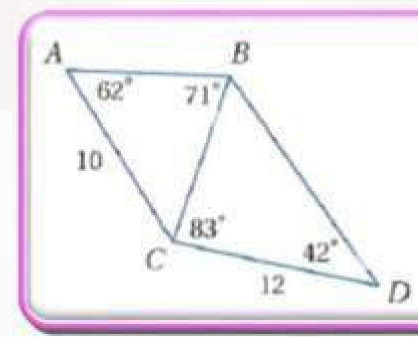
30)

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{RQ}$ أصغر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{PQ}$

إذن حسب نظرية ١٠,٤: $\overline{RQ} < \overline{PQ}$



31) اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتَّبة من الأقصر إلى الأطول. ووضح إجابتك.





$\angle ACB = 180^\circ - (62 + 71) = 47^\circ$

$\angle CBD = 180^\circ - (83 + 42) = 55^\circ$

في ΔABC يكون $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$ حسب نظرية ٤,١٠

وفي ΔBCD يكون $\overline{BC} < \overline{CD} < \overline{BD}$ حسب نظرية ٤,١٠



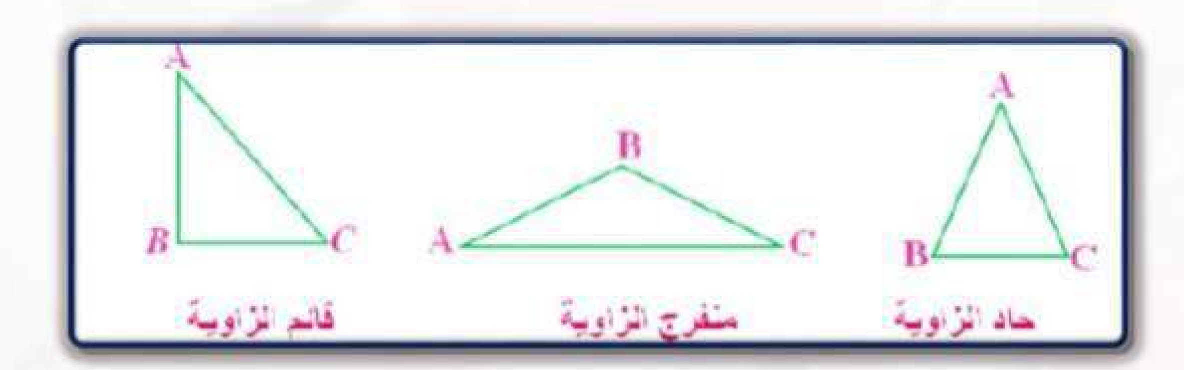
32) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث.

a) هندسيًا: ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمّ رؤوس كل مثلث A, B, C.

b) جدوليًا: استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انسخ الجدول في دفترك وأكمله.

المثلث	AB	BC	$AB + BC$	CA
الحاد الزوايا				
المنفرج الزاوية				
القائم الزاوية				





المثلث	AB	BC	$AB + BC$	CA
الحاد	٢	٢,٤	٤,٤	٣,٢
المنفرج	٢,٦	٣,٤	٦,٠	٥,٠
القائم	٢,٧	٢,٨	٥,٥	٣,٩



c) **جدوليًا:** نظّم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع AB, CA في الجدول الآخر.

d) **جبريًا:** اكتب متباينة لكل جدول كوّنته تربط بين مجموع طولَي الضلعين في مثلثٍ وطول الضلع الثالث.

e) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.



المثلث	BC	CA	$BC+CA$	AB
الحاد	٢,٤	٣,٢	٥,٦	٢
المنفرج	٣,٤	٥,٠	٨,٤	٢,٦
القائم	٢,٨	٣,٩	٦,٦	٢,٧

المثلث	AB	CA	$AB+CA$	BC
الحاد	٢	٣,٢	٥,٢	٢,٤
المنفرج	٢,٦	٥,٠	٧,٦	٣,٤
القائم	٢,٧	٣,٩	٦,٥	٢,٨

32d) جبرياً:

$AB+BC>CA,\ BC+CA>AB,\ AB+CA>BC$

32e) لفظيا:

مجموع طولي أي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

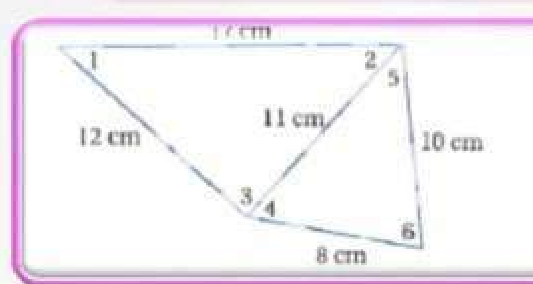
√ مهارات التفكير العليا

33) تبرير: هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائمًا أم أحيانًا أم لا تكون أبدًا؟ وضح إجابتك.



أحيانا: إذا كان قياسا زاويتي القاعدة أقل من $60°$ فإن القاعدة ستكون الضلع الأطول وإذا كان قياسا زاويتي القاعدة أكبر من $60°$ فإن القاعدة ستكون الضلع الأقصر.

34) تحدٍّ: استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛ لترتب قياسات الزوايا المرقّمة من الأصغر إلى الأكبر، إذا علمت أنّ $m\angle 2 = m\angle 5$. ووضح إجابتك.



$m\angle 2 = m\angle 5$: $m\angle 1$. $m\angle 3$. $m\angle 6$. $m\angle 4$

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle 5$ هو أقصر ضلع في المثلث الذي يحتويها و $m\angle 2 = m\angle 5$ فإن كلا من $m\angle 3$. $m\angle 1$. $m\angle 4$. $m\angle 6$ أكبر من $m\angle 2$. $m\angle 5$

وبما أن الضلع المقابل لـ $\angle 4$ أقصر من الضلع المقابل لـ $\angle 6$. $\angle 1$

وبما أن الضلع المقابل لـ $\angle 6$. $\angle 1$ أقصر من الضلع المقابل لـ $\angle 3$ إذن:

$m\angle 3 > m\angle 6$. $m\angle 1 > m\angle 4 > m\angle 2$. $m\angle 5$

35) اكتب: وضّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا ؟

بما أن الوتر في المثلث قائم الزاوية يقابل الزاوية القائمة وكلا من الزاويتين الأخريين حادتان دائما فإن الوتر يقابل دائما الزاوية الكبرى في المثلث ولذلك فإنه الضلع الأطول دائما.

٤-٤ البرهان غير المباشر
Indirect Proof





يصف شارلوك هولمز أسلوبه في كشف الغموض كالآتي: «تبدأ العملية بافتراض، وعندما تستبعد كل ما هو غير معقول، فما الذي سيبقى؟ ... إنّها الحقيقة». هذه الطريقة التي وصفها شارلوك هولمز مثال على البرهان غير المباشر.

فيما سبق:

درستُ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

والآن:

- أكْتُب براهين جبريّة غير مباشرة.
- أكْتُب براهين هندسيّة غير مباشرة.

المفردات:

التبرير غير المباشر
indirect reasoning

البرهان غير المباشر
indirect proof

البرهان بالتناقض
proof by contradiction

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها التبرير، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة . وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع أيّ حقيقة سابقة كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة. يسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.



٤-٤ البرهان غير المباشر
Indirect Proof

مفهوم أساسي — كتابة البرهان غير المباشر

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ عكسها صحيح.

الخطوة 2: استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع حقيقة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريّة.

الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيِّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

مثال 1 — صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

a) $\angle ABC \not\cong \angle XYZ$

الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) إذا كان العدد **6** عاملًا للعدد n ، فإن **2** عامل للعدد n .

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n . ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n ؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n .

c) $\angle 3$ زاوية منفرجة.

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاوية منفرجة.





تحقق من فهمك

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1A) $x > 5$

$x \leq 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

النقاط j,k,l لا تقع على استقامة واحدة

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

$\triangle XYZ$ ليس متطابق الأضلاع.



مثال 2 كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$.

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

الخطوة 2: كوّن جدولًا بعدّة قيم ممكنة لِـ $x > -4$ ، أو $x = -4$.

x	-4	-3	-2	-1	0
$-3x+4$	16	13	10	7	4

عندما تكون $x > -4$ ، فإن $-3x + 4 < 16$. وعندما $x = -4$ ، فإن $-3x + 4 = 16$.

الخطوة 3: في كلتا الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $-3x + 4 > 16$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصليّة $x < -4$ هي الصحيحة.

قراءة الرياضيات

التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينص على أنه لا يمكن تحقق الافتراض و عكسه في آنٍ واحدٍ.



تحقق من فهمك

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإنّ $x > 8$.

2A) المعطيات: $7x > 56$

المطلوب: $x > 8$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x < 8$ أو $x = 8$

الخطوة 2:

x	4	5	6	7	8
$7x$	28	35	42	49	56

عندما تكون $x < 8$، فإنّ $7x < 56$، وعندما تكون $x = 8$، فإنّ $7x = 56$

الخطوة 3: الفرض في الحالتين يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة وهي $7x > 56$؛ لذا فالفرض بأن $x \leq 8$ فرض خطأ، والنتيجة الأصلية بأنّ $x > 8$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.



تحقق من فهمك

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍ من العبارتين الآتيتين:

2B) إذا كان $-c$ موجبًا ، فإنّ c سالبٌ.

2B) **المعطيات:** $-c > 0$

المطلوب: إثبات أن $c < 0$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $c > 0$ أو $c = 0$

الخطوة 2:

c	0	1	2	3	4
$-c$	0	−1	−2	−3	−4

إذا كانت $c > 0$، فإن $-c < 0$؛ وإذا كانت $c = 0$، فإنّ $-c = 0$

الخطوة 3: الفرض في الحالتين يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة $-c > 0$؛ لذا فالفرض بأن $c \geq 0$ فرض خطأ، والنتيجة الأصليّة بأنّ $c < 0$ نتيجة صحيحة، وبما أنّ $c < 0$ صحيحة، فإنّ c عدد سالب بالتأكيد.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تسوق: اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالًا. وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامد عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.
$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، y ثمن القميص الثاني.

المطلوب: إثبات أن: قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كل من القميصين لا يزيد على 30 ريالًا، أي أنّ $x \leq 30 , y \leq 30$.

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30 , y \leq 30$، فإنّ $x + y \leq 60$. وهذا تناقض، لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \leq 30 , y \leq 30$ افتراض خطأ. لذلك يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالًا.

تحقق من فهمك

3) **رحلة:** قطع رياض أكثر من 360 كيلومترًا في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلومترًا في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

المعطيات: $x + y + z > 360$

المطلوب: $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن: $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$

الخطوة 2: إذا كانت: $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$، فإن

$x + y + z \leq 120 + 120 + 120$ أو $x + y + z \leq 360$

الخطوة 3: وهذا يناقض العبارة المعطاة، لذلك فالفرض خطأ و $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$، أي أنه قطع أكثر من 120 km في مرحلة واحدة من رحلته على الأقل.

مثال 4 براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي ، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$ ، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x + 2 = (2k + 1) + 2$	بالتعويض
$= (2k + 2) + 1$	خاصيّة الإبدال
$= 2(k + 1) + 1$	خاصية التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًا أو فرديًا. بما أن k عدد صحيح فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$ ، فيكون:

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ بالتعويض

إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$ ، حيث m عدد صحيح. ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحة.



تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كان مربع عدد صحيح فرديًا فإنّ العدد الصحيح فردي".

4) **المعطيات:** x^2 عدد صحيح فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد زوجي، وهذا يعني أن $x = 2k$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

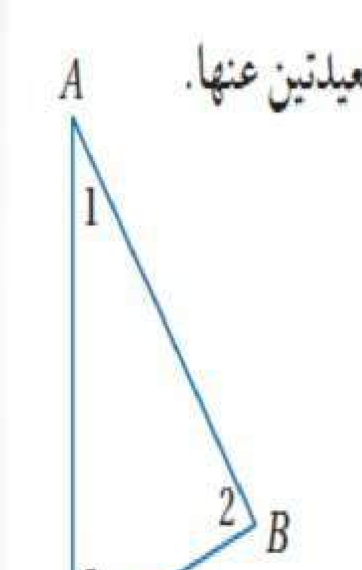
$x^2 = (2k)^2$	بالتعويض عن الفرض بالمعطيات
$= 4k^2$	بالتبسيط
$= (2 \cdot 2)k^2$	بالتحليل
$= 2(2k^2)$	خاصية التجميع للضرب

وبما أن k عدد صحيح، فإنّ $2k^2$ عدد صحيح أيضًا، ولكن m يمثل العدد الصحيح $2k^2$، فإنه يمكن تمثيل x^2 بالعدد $2m$، حيث m عدد صحيح، وهذا يعني أن x^2 عدد زوجي، ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأنّ x^2 عدد فردي.

الخطوة 3: بما أن الفرض: x عدد زوجي أدى إلى تناقض مع المعطيات، فإنّ النتيجة الأصلية بأن x عدد فردي صحيحة بالتأكيد.

مثال 5 برهان هندسي

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$ ، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$، أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.

أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يساعدك المثال المضاد على تفنيد تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.



مثال 5 برهان هندسي

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

ارسم شكلًا توضيحيًا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$ ، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

A, 1, 2, B, 3, C, 4

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$، أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.

أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يساعدك المثال المضاد على تفنيد تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.

إرشادات للدراسة

تعرّف التناقضات

تذكّر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5 ، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 1 \le m\angle 4$ يؤدي إلى تناقض، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 2 \le m\angle 4$ إلى تناقض أيضًا .

الافتراض $m\angle 1 \le m\angle 4$ يعني أن $m\angle 1 = m\angle 4$ أو $m\angle 1 < m\angle 4$.

الحالة 1: $m\angle 1 = m\angle 4$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظريه الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$	بالتعويض
$0 = m\angle 2$	بطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0؛ لذا فإن $m\angle 1 \neq m\angle 4$.

الحالة 2: $m\angle 1 < m\angle 4$

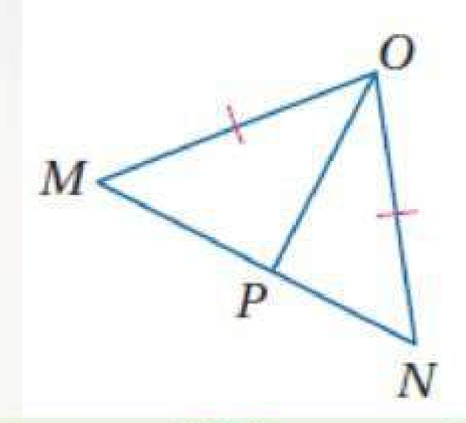
بحسب نظرية الزاوية الخارجيّة فإن $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$. وبما أن قياسات الزوايا موجبة، فإنّ تعريف المتباينة يُحتّم أن تكون $m\angle 1 > m\angle 4$. وهذا يناقض الفرض بأن $m\angle 1 < m\angle 4$.



الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا $m\angle 4 > m\angle 2$ وأن $m\angle 4 > m\angle 1$ يجب أن تكون صحيحة.



تحقق من فهمك



5) اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \ncong \angle NOP$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle MOP \cong \angle NOP$.

الخطوة 2: تعلم أن $\overline{MO} \cong \overline{ON}$ وأن $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ بحسب خاصية الانعكاس.
وإذا كانت $\angle MOP \cong \angle NOP$، فإنّ $\triangle MOP \cong \triangle NOP$ بحسب SAS.
ويكون $\overline{MP} \cong \overline{NP}$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة.
وهذه النتيجة تناقض المعلومة المعطاة.

الخطوة 3: إذن الفرض خطأ، إذن $\angle MOP \ncong \angle NOP$.





٤-٤ البرهان غير المباشر
Indirect Proof





اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$ ، فإنّ $x < 6$

4) $\angle A$ ليست زاوية قائمة.



1) $\overline{AB} \not\cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$ ، فإن $x \geq 6$

4) $\angle A$ زاوية قائمة





اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

5) إذا كان $2x + 3 < 7$ ، فإنّ $x < 2$



المعطيات: $2x + 3 < 7$

المطلوب: $x < 2$

البرهان غير المباشر:

الخطوة ١: افرض أن $x > 2$ أو $x = 2$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	٢	٣	٤	٥	٦
$2x + 3$	٧	٩	١١	١٣	١٥

عندما تكون $x > 2$ فإن $2x + 3 > 7$ وعندما تكون $x = 2$ فإن $2x + 3 = 7$.

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $2x + 3 < 7$ لذلك فالفرض بأن $x \geq 2$ خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x < 2$ صحيحة بالتأكيد.



6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإنّ $x > 4$



المعطيات: $3x - 4 > 8$

المطلوب: $x > 4$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $x < 4$ أو $x = 4$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	٠	١	٢	٣	٤
$3x - 4$	-4	-1	٢	٥	٨

عندما $x < 4$ فإن $3x - 4 < 8$ وعندما $x = 4$ فإن $3x - 4 = 8$.

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $3x - 4 > 8$ لذلك فالفرض بأن $x \leq 4$ خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x > 4$ صحيحة بالتأكيد.





7) كرة قدم: سجّل فهد 13 هدفا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3



افرض أن المتوسط يساوي a هدفا

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن متوسط عدد الأهداف التي سجلها فهد في كل مباراة كان أكبر من أو يساوي ٣، أي $a \geq 3$.

الخطوة ٢:

الحالة ١	الحالة ٢
$a = 3$	$a > 3$
$\frac{13}{6} \stackrel{?}{=} 3$	$\frac{13}{6} \stackrel{?}{>} 3$
$2.2 \neq 3$	$2.2 \not> 3$

الخطوة ٣: النتائج ليست صحيحة لذلك فالفرض خطأ. إذن فمتوسط عدد الأهداف التي سجلها فهد في كل مباراة أقل من ٣ أهداف.





8) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $5x - 2$ عددًا فرديًا، فإن x عدد فردي.



المعطيات: $5x - 2$ عدد فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة١: افرض أن x عددا ليس فرديا. أي أفرض أ ن x عدد زوجي.

الخطوة٢: ليكن $x = 2k$ حيث k عدد صحيح.

$5x - 2 = 5(2k) - 2$ بتعويض الفرض.

$= 10k - 2$ خاصية الضرب.

$= 2(5k - 1)$ خاصية التوزيع.

وبما أن k عدد صحيح فإن $5k - 1 =$ عدد صحيح أيضا. افرض أن p يمثل العدد $5k - 1$ فيمكن تمثيل $5x - 2$ بـ $2p$. حيث p عدد صحيح وهذا يعني أن $5x - 2$ عدد صحيح زوجي ولكن هذا يناقض المعطيات بأن $5x - 2$ عدد فردي.

الخطوة٣: بما أن الفرض بأن x عدد زوجي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن x عدد فردي نتيجة صحيحة.



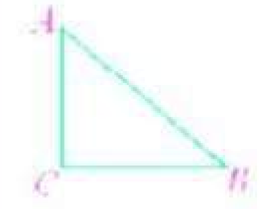


اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين:

9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنّه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.





المعطيات: ABC مثلث قائم الزاوية؛ $\angle C$ زاوية قائمة.

المطلوب: $AB > AC$ و $AB > BC$.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن وتر المثلث القائم الزاوية ليس الضلع الأطول أي أن $AB < BC$ و $AB < AC$.

الخطوة ٢: إذا كان $AB < BC$ فإن $m\angle C < m\angle A$. وبما أن $m\angle C = 90$، فإن $m\angle A > 90$ إذن $m\angle C + m\angle A > 180$ وبالتبرير نفسه $m\angle C + m\angle B > 180$

الخطوة ٣: كلا العلاقتين تناقضان الحقيقة بأن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°. لذلك فالوتر هو أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية.



10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنّه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.





المعطيات: $\angle A$ ، $\angle B$ متكاملتان

المطلوب: $\angle A$ ، $\angle B$ لا يمكن أن تكونا منفرجتين معا.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن $\angle A$ ، $\angle B$ كلاهما زاوية منفرجة.

الخطوة 2: من تعريف الزاوية المنفرجة $m\angle A > 90$ و $m\angle B > 90$ لذلك

$$m\angle A + m\angle B > 180^\circ$$

الخطوة ٣: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذلك فالنتيجة الأصلية بأن $\angle A$ ، $\angle B$ لا يمكن أن يكونا منفرجتين معا صحيحة بالتأكيد.








اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

11) إذا كان $2x < 16$ ، فإنّ $x > 8$.

12) $\angle 2$ ، $\angle 1$ زاويتان غير متكاملتين.

13) إذا تساوى ميلا مستقيمين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2 .



11) اذا كان $2x > 16$ ، فإن $x \leq 8$

12) $\angle 2$ ، $\angle 1$ زاويتان متكاملتان

13) اذا كان ميلا مستقيمان متساويين فإنهما غير متوازيين.

14) العدد الفردي يقبل القسمة على 2.





اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.



المعطيات: $-2x - 6 > 12$

المطلوب: $x < -9$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن $x \geq -9$ صحيحة.

خطوة ٢:

x	-9	-8	-7	-6	-5
$-2x - 6$	١٢	١٠	٨	٦	٤

عندما تكون $x > -9$ فإن $-2x - 6 < 12$ وعندما تكون $x = -9$ فإن

$-2x - 6 = 12$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $-2x - 6 > 12$ لذلك فالفرض بأن $x \geq -9$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x < -9$ صحيحة بالتأكيد.





16) إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإنّ $x < -9$.



المعطيات: $-3x + 4 < 7$

المطلوب: $x > -1$

برهان غير مباشر: الخطوة ١: افرض أن $x \le -1$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	-5	-4	-3	-2	-1
$-3x+4$	١٩	١٦	١٣	١٠	٧

عندما تكون $x < -1$ فإن $-3x + 4 > 7$ عندما تكون $x = -1$ فإن $-3x + 4 = 7$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $-3x + 4 < 7$ لذلك فالفرض بأن $x \le -1$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x > -1$ صحيحة بالتأكيد.



17) **ألعاب حاسوب:** اشترى منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسابيع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التبرير غير المباشر؛ لتبين أن إحدى اللعبتين على الأقلّ كلّفت أكثر من 200 ريال.

18) **جمع التبرعات:** أقامت جمعيّة خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحتاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالًا، وللأطفال 12.5 ريالًا. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار.



افرض أن ثمن إحدى الألعاب x والأخرى y.

الخطوة 1: المعطيات: $x + y > 400$

المطلوب: $x > 200$ أو $y > 200$

برهان غير مباشر:

افرض أن $x \le 200$ و $y \le 200$

الخطوة 2: إذا كانت $x \le 200$ و $y \le 200$ فإن:

$x + y \le 200 + 200$ أو $x + y \le 400$ وهذا يناقض الفرض $x + y > 400$.

الخطوة 3: بما أن الفرض $x \le 200$ و $x \le 200$ أدى إلى تناقض مع حقيقة معلومة فإن هذا الفرض خطأ لذلك فالنتيجة بأن $x > 200$ أو $y > 200$ ستكون صحيحة أي أن ثمن لعبة واحدة من اللعبتين على الأقل أكبر من 200 ريال.

الخطوة 1: افرض انه بيع اقل من 150 تذكرة للكبار.

الخطوة ٢: إذا بيع ١٤٩ تذكرة للكبار فسيكون:

عدد تذاكر الأطفال التي بيعت = ٣٧٥ _ ١٤٩ = ٢٢٦ تذكرة والثمن الكلي لبيع ١٤٩ تذكرة للكبار و ٢٢٦ تذكرة للأطفال = ١٢.٥ × ٢٢٦ + ٣٠ × ١٤٩ = ٧٢٩٥

الخطوة ٣: بما أن النتيجة خطأ فإن الفرض خطأ إذا عدد تذاكر الكبار التي بيعت ≥ ١٥٠ تذكرة.





اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

19) **المعطيات:** xy عدد صحيح فردي.

المطلوب: كلًّا من x, y عدد صحيح فردي



المعطيات: xy عدد صحيح فردي.

المطلوب: كلا من x و y عدد صحيح فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن x و y عددان ليسا فرديين معا. أي افرض أن x أو y عدد زوجي.

الخطوة ٢: تحتاج فقط إلى بيان أن الفرض: x عدد زوجي يؤدي إلى تناقض لأن البرهان عند افتراض أن y عدد زوجي يتبع التبرير نفسه. لذلك افرض أن x عدد زوجي وأن y عدد فردي هذا يعني أن $x = 2k$ و $y = 2m + 1$ حيث k و m عددان صحيحان.

$xy = (2k)(2m+1)$ بتعويض الفرض

$= 4km + 2k$ خاصية التوزيع

$= 2(2km + k)$ خاصية التوزيع

بما أن k و m عددان صحيحان فإن $2km + k$ عدد صحيح أيضا ليكن p يمثل العدد $2km + k$. لذا فيمكن أن يمثل العدد xy بـ $2p$ حيث p عدد صحيح. وهذا يعني أن xy عدد زوجي ولكن هذا يناقض المعطيات بأن xy عدد فردي.

بما أن الفرض: x عدد زوجي و y عدد فردي يؤدي إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن كلا من x و y عدد صحيح فردي نتيجة صحيحة بالتأكيد.



20) **المعطيات،** n^2 عدد زوجي.

المطلوب، n عدد زوجي.



المعطيات: n^2 عدد زوجي

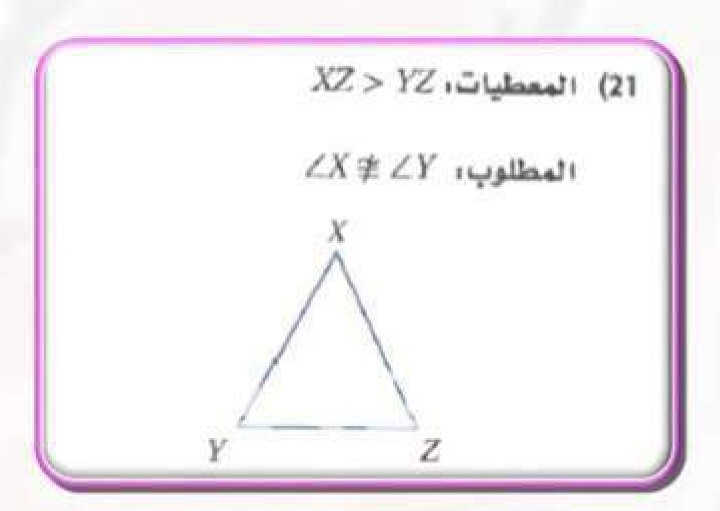
المطلوب: n عدد زوجي أي n^2 يقبل القسمة على ٤

البرهان:

- بفرض أن n^2 لا يقبل القسمة على ٤، أي ان ٤ ليس عامل من عوامل n^2.
- إذا كان مربع عدد هو عدد زوجي، إذن العدد هو أيضا عدد زوجي لذا اذا كان n^2 عدد زوجي، nيجب أن تكون عدد زوجي.
- نفرض أن $n = 2a$
- $n^2 = (2a)^2$
- $n^2 = 4a^2$
- 4 عامل من عوامل n^2 و هذا يتعارض مع الفرض

إذن n عدد زوجي







الخطوة١: أفرض أن $\angle X \cong \angle Y$.

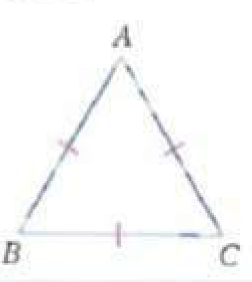
الخطوة٢: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ حسب عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين.

الخطوة ٣: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $XZ > YZ$ لذلك فالفرض بأن $\angle X \cong \angle Y$ خطأ لذا فإن النتيجة الأصلية بأن $\angle X \ncong \angle Y$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.



22) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.





الخطوة ١: أفرض أن ΔABC ليس متطابق الزاويا.

الخطوة ٢: $m\angle B > m\angle C$ فإن $\overline{AC} > \overline{AB}$ حسب متباينة زاوية ضلع في مثلث.

الخطوة ٣: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأن ΔABC متطابق الأضلاع. لذا فإن الفرض بأن ΔABC ليس متطابق الزاويا خطأ والنتيجة الأصلية بأن ΔABC متطابق الزوايا نتيجة صحيحة بالتأكيد.



23) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث أكثر من زاوية قائمة.

24) اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10.



الخطوة ١: أفرض أن للمثلث ABC أكثر من زاوية قائمة.

الخطوة ٢: إذا كانت $\angle B$ و $\angle C$ زاويتين قائمتين فإن $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$. لكن $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ لأن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°. وبالتعويض $m\angle A + 180^\circ = 180^\circ$ إذن $m\angle A = 0^\circ$

الخطوة ٣: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأن ΔABC مثلث لذلك فالفرض بأن للمثلث ΔABC أكثر من زاوية قائمة خطأ والنتيجة الأصلية بأنه لايمكن أن يكون للمثلث ΔABC أكثر من زاوية قائمة نتيجة صحيحة.

برهان:

أفرض أن $AC > BC$. فحسب خاصية المقارنة يكون $AC = BC$ أو $AC < BC$.

الحالة ١: إذا كان $AC = BC$ فإن $\angle A \cong \angle ABC$ حسب نظرية المثلث متطابق الضلعين (إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان).

لكن $\angle A \cong \angle ABC$ تناقض العبارة المعطاة بأن $m\angle A > m\angle ABC$. إذن



$BC \neq AC$.

الحالة ٢ :

إذا كان $AC < BC$ فإنه يوجد نقطة D بين A و C بحيث يكون $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{BD}$ بما أن $DC = BC$ فإن

$\angle BDC \cong \angle DBC$ حسب نظرية المثلث متطابق الضلعين ولأن $\angle BDC$ زاوية خارجية لـ BAD وحسب نظرية الزاوية الخارجية (قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها) يكون

$m\angle BDC > m\angle A$ وحسب مسلمة جمع الزوايا يكون:

$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$. إذن وحسب تعريف المتباينة يكون

$m\angle ABC > m\angle DBC$. وبالتعويض وخاصية التعدي للمتباينة يكون

$m\angle ABC > m\angle A$ ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأن

$m\angle A > m\angle ABC$. وفي الحالتين وصلنا إلى تناقض فالفرض خطأ لذلك

$BC > AC$.



25) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $\frac{1}{b} > 0$ ، فإن b عدد سالب.

26) **كرة سلة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قُبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان فريق مدرسته متقدمًا بـ 28 نقطة مقابل 26 . وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدمًا بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم ذلك أنّ لاعبًا من الفريق المنافس سجّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحّة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.



الخطوة ١: افرض أن $b < 0$ وأن $b \neq 0$ لأن ذلك سيجعل $\frac{1}{b}$ غير معرف.

الخطوة ٢: $b > 0$ فإن $\frac{1}{b} > 0$ لأن ناتج قسمة عدد موجب على عدد موجب يكون موجبا.

الخطوة ٣: لكن $\frac{1}{b} < 0$ يناقض المعطيات. لذلك فالفرض خطأ إذن b عدد سالب بالتأكيد.

نعلم أن الفريق الآخر سجل ٣ نقاط ويعتقد أخو عدنان بأنهم ثلاث نقاط من رمية واحدة ونعلم أيضا أنه يمكن للاعب أن يسجل ٣ نقاط بتسجيل نقطتين والحصول على رمية حرة نتيجة خطأ الفريق المنافس.

الخطوة ١: افرض أن لاعبا من الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرة.

الخطوة٢: بما أن عدد نقاط الفريق المنافس كان قبل أن يخرج عدنان من الملعب ٢٦ نقطة فإن عدد نقاطهم بعد تسجيل نقطتين وحصولهم على رمية حرة سيكون ٢٦ + ٣ أو ٢٩.

الخطوة٣: بما أن عدد النقاط صحيح عندما افترضنا أن الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرة فإن افتراض أخو عدنان قد يكون غير صحيح. فالفريق المنافس يمكن أن يكون قد حصل على ثلاث نقاط من رمية واحدة من خارج منطقة الهدف أو على نقطتين ورمية حرة.



27) ألعاب إلكترونية: تتضمن لعبة حاسوبية فارسًا في رحلةٍ للبحث عن الكنز، وفي نهاية الرحلة يقترب الفارس من البابين المبيَّنين أدناه.



أخبر خادمٌ الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحدد أيّ البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك.



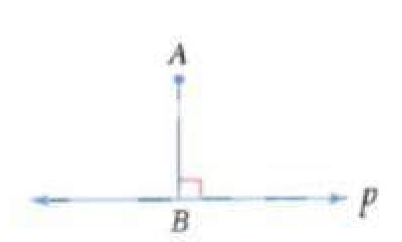
الباب الأيمن. فإذا كان الإعلان على الباب الأيسر صحيحا فإن الإعلانين سيكونان صحيحين. إلا أن أحد الإعلانين خطأ لذا يجب أن يكون الإعلان المكتوب على الباب الأيسر خطأ.



حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوٍ، يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهانًا لكلٍّ منهما.

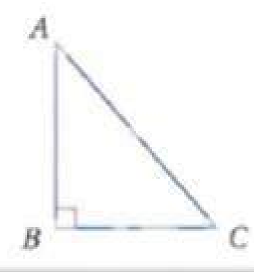
28) **المعطيات:** $\overline{AB}$ عمودي على المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى المستقيم p.



29) **المعطيات:** ABC مثلث قائم الزاوية

المطلوب: الوتر $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث





برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.

الخطوة ٢: بما أن أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P فإنه توجد نقطة C على P بحيث تكون $\overline{AC}$ أقصر قطعة مستقيمة. وبما أن ΔABC قائم الزاوية

وتره $\overline{AC}$ فإن ΔABC أطول ضلع ΔABC لأنه يقابل أكبر زاوية في ΔABC حسب متباينة زاوية ـ ضلع في المثلث.

الخطوة ٣: يناقض هذا الفرض بأن $\overline{AC}$ أقصر ضلع ولذلك فالفرض خطأ والصحيح هو أن $\overline{AB}$ أقصر بالتأكيد.

المثلث قائم الزاوية في B إذن مجموع الزاويتين الاخرتين = ٩٠
أي كل منهما أقل من ٩٠ وهذا يعني أن B هي أكبر زوايا المثلث
وبالتالي يكون الوتر $\overline{AC}$ هو أطول ضلع في المثلث



30) نظرية الأعداد: في هذه المسألة ستُخمّن علاقةً في نظرية الأعداد، وتُثبت صحة تخمينك.

a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب العدد n والعدد ثلاثة".

b) كوّن جدولًا يعطي قيم العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لِـ n.

c) اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجيّة.

d) اكتب برهانًا غير مباشر لتخمينك.



(30a n^3+3

(30b

n	n^3+3
٢	١١
٣	٣٠
١٠	١٠٠٣
١١	١٣٣٤
٢٤	١٣٨٢٧
٢٥	١٥٦٢٨
١٠٠	١٠٠٠٠٠٣
١٠١	١٠٣٠٣٠٤
٥٢٦	١٤٥٥٣١٥٧٩
٥٢٧	١٤٦٣٦٣١٨٦

(30c يكون n عددًا فرديا عندما يكون n^3+3 عددا زوجيا.

(30d برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن n عدد زوجي وليكن $n=2k$ حيث k عدد صحيح.

الخطوة ٢: $n^3+3=(2k)^3+3$ بتعويض الفرض

$=8k^3+3$ بالتبسيط

$=(8k^3+2)+1$ بكتابة ٣ على صورة $2+1$ وتجمع أول حدين.

$=2(4k^3+1)+1$ خاصية التوزيع

وبما أن k عدد صحيح فإن $4k^3+1$ عدد صحيح أيضا لذا فإن n^3+3 عدد فردي.

الخطوة ٣: وهذا يناقض الفرض بأن n^3+3 عدد زوجي لذا فإن الفرض خطأ والنتيجة بأن n عدد فردي نتيجةً صحيحةً.